知能システム学Ⅰ

次の３問すべてを解答せよ．各問題毎に別の答案用紙を用いること．答案用紙の追加は認めない．

1

以下の問い 1)〜4) に答えよ．ただし x は実数，z は複素数を表す．

1) $\sin\dfrac{\pi}{18}$ が $8x^3-6x+1=0$ の解であることを示せ．また残り二つの解は $\sin$ ア と $\sin$ イ である．ア と イ に入る値を求めよ．ただし，ア と イ に入る値は 0 以上 2π 未満である．

2) $\sin z=2$ を満たす z を求めよ．

3) 曲線 $C: z(t)=\alpha+re^{it}$ $(0\leqq t<2\pi)$ の積分路に沿って反時計回りに以下の複素関数 $f(z)$ を積分せよ．ただし r は実数で $r>0$，α は複素数で定数，n は任意の整数，i は虚数単位とする．

$$f(z)=(z-\alpha)^n$$

4) 曲線 $C: z(t)=\alpha+e^{it}$ $(0\leqq t<2\pi)$ の積分路に沿って反時計回りに以下の複素関数 $g(z)$ を積分する．ただし i は虚数単位とする．

$$g(z)=\frac{3z^2+1}{z^2-1}$$

次の 4 つの条件に対応した解を求めよ．

a) $\alpha=1$
b) $\alpha=0.5$
c) $\alpha=-1$
d) $\alpha=i$

2

$\boldsymbol{A}$ はランクが k の $m \times n$ 実行列である．m，n および k は正の整数であり，$m > n \geqq k$ とする．$\boldsymbol{I}_k$ はサイズが $k \times k$ の単位行列であり，$\boldsymbol{A}^T$ は $\boldsymbol{A}$ の転置を表す．$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ は 0 でない相異なる固有値を k 個もち，i 番目の 0 でない固有値を λ_i $(i = 1, \cdots, k)$，対応する大きさ 1 の固有ベクトルを $\boldsymbol{u}_i$ とする．以下の問い 1)〜7) に答えよ．

1) $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ が実対称行列かつ半正定値行列であることを示せ．

2) λ_i が実数であることを示せ．

3) 相異なる 0 でない固有値 λ_i と λ_j $(i \neq j)$ に対応する固有ベクトルの内積 $\langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j \rangle$ が 0 となることを示せ．

4) 2 次形式 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ の最大値および最小値を求めよ．ただし，$\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x} = 1$ を満たす任意の $n \times 1$ 実ベクトルである．

5) $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ の 0 でない全ての固有値が $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$ の固有値となることを示せ．

6) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^T$ なる行列分解を考える．$\boldsymbol{\Sigma}$ は $k \times k$ の実対角行列で，その対角成分の i 番目を σ_i とするとき，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{u}_i$，σ_i の関係を示せ．ただし，$\boldsymbol{Q}$ は $m \times k$ の行列で，$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}_k$ を満たす．また，$\boldsymbol{V}$ は $n \times k$ の行列で，$\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{V} = \boldsymbol{I}_k$ を満たす．

7) $\boldsymbol{A}$ が

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

のとき，$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$ の固有値，固有ベクトルを用いて，$\boldsymbol{Q}$，$\boldsymbol{\Sigma}$，$\boldsymbol{V}$ の組み合わせを全て求めよ．

3

以下の問い 1)，2)に答えよ．

1) プログラム１は，大文字アルファベット３文字からなる商品名をキーとし，その商品の価格をオープンアドレスのハッシュ法で格納するＣ言語のプログラムである．オープンアドレスとは，ハッシュ値が衝突したときに，再ハッシュして新たなハッシュ値を求め直す方法である．以下の小問 a)～e)に答えよ．ただし，商品価格は０（ゼロ）を含むものとする．

a) ハッシュ値が衝突したときに再ハッシュするのではなく，同一のハッシュ値をもつデータをハッシュ表とは別に連結リストで格納する手法がある．その名称を述べよ．また，データ数をｎとしたとき，連結リストを用いてこの線形探索を行うハッシュ法の最良時間計算量と最悪時間計算量をオーダー表記で表せ．

b) プログラム１の 10～14 行目の関数 hash()はハッシュ値を返す関数である．"ACE", "ACT", "CAT" の各文字列のポインタを渡した際に返されるハッシュ値を示せ．

c) プログラム１の 10～14 行目の関数 hash()と 15～19 行目の関数 rehash()を比較するとき，rehash()が返すハッシュ値の方が文字列を扱う際には優良と考えられる．その理由を簡単に述べよ．

d) 空欄 [A] を埋めよ．

e) このプログラムを実行したときの標準出力結果を示せ．

プログラム１

```
1   #include <stdio.h>
2   #include <string.h>
3   #define AtoZ ('Z'-'A'+1)
4   #define HT_SIZE 10
5   #define NOISE_PARAM 100
6   struct {
7       char name[4];
8       int price;
9   } hash_table[HT_SIZE];
10  int hash(char *key){
11      unsigned long h = 0;
12      h = (key[0]-'A')+(key[1]-'A')+(key[2]-'A');
13      return h%HT_SIZE;
14  }
15  int rehash(char *key){
16      unsigned long h = 0;
17      h = (key[0]-'A')*AtoZ*AtoZ+(key[1]-'A')*AtoZ+(key[2]-'A');
18      return h*h/NOISE_PARAM%HT_SIZE;
19  }
20  int insert(char *key, int data) {
21      int hash_value;
22      hash_value = hash(key);
23      if(     A      ){
24          strcpy(hash_table[hash_value].name, key);
25          hash_table[hash_value].price = data;
26          return 1;
27      }
```

---次ページに続く---

---問題３の続き---

```
28      hash_value = rehash(key);
29      if(     A       ){
30          strcpy(hash_table[hash_value].name, key);
31          hash_table[hash_value].price = data;
32          return 1;
33      }
34      while(hash_value < HT_SIZE) {
35          hash_value++;
36          if(     A       ){
37              strcpy(hash_table[hash_value].name, key);
38              hash_table[hash_value].price = data;
39              return 1;
40          }
41          }
42      printf("Rehash Error!\n");
43      return 0;
44  }
45  int main(void) {
46      for(int i=0; i<HT_SIZE ; i++) {
47          strcpy(hash_table[i].name, "");
48          hash_table[i].price = 0;
49      }
50      insert("ACE", 100);
51      insert("ACT", 200);
52      insert("CAT", 300);
53      for(int i=0; i<HT_SIZE ; i++) {
54          printf("%d: %s %d\n", i, hash_table[i].name,
55                  hash_table[i].price);
56      }
57      return 0;
58  }
```

2)　以下の問題はナップサック問題（ナップザック問題）と呼ばれる.

「n 個の品物があり，それぞれの大きさと価値が決まっているとき，大きさの合計がw以下で，価値の合計が最大になるような品物の組み合わせを求める.」

この問題での最大価値は再帰を用いたプログラムで得ることができる. プログラム 2 は再帰実装の例で，式(1)の漸化式に従って作成されている. ここで，$V(i,w)$は大きさの合計の上限がwのとき，i個の品物を用いて得られる最大価値である. 式(1)の関数maxは最大値を選ぶことを示す. v_iはi番目の品物の価値を，w_iはi番目の品物の大きさを指す.

$$V(i,w)=\begin{cases}0 & ,\ \text{if } i=0\\ \max(V(i-1,w),v_i+V(i-1,w-w_i)) & ,\ \text{if } i\geqq 1\end{cases} \tag{1}$$

プログラム中の配列 val と wt は，それぞれ，式(1)中のv_iとw_iに対応して，各品物の価値と大きさを表す. ただし，いずれの配列も，末尾の要素は，プログラムをエラーなく動作させるために必要なものであり，品物の価値，大きさとは関係がない. 変数 wu は式(1)中のwに対応して，大きさの合計の上限を表す. このプログラムに関する以下の小問 a)，b)に答えよ.

---次ページに続く---

---問題３の続き---

a) 空欄 B を埋めよ.

b) このプログラムを実行したときの標準出力結果を示せ.

プログラム２

```
1   #include <stdio.h>
2   int max_op(int a, int b) {return (a>b)? a:b;}
3   int knap_sack(int i, int wu, int wt[], int val[]) {
4       int result=0;
5       if(i==0 || wu==0){
6           result=0;
7       } else if(wt[i-1] > wu) {
8           result = knap_sack(i-1, wu, wt, val);
9       } else {
10          result = max_op(     B     );
11      }
12      printf("%d step: %d\n", i, result);
13      return result;
14  }
15  int main(void){
16      int val[] = {6, 10, 12, 0};
17      int wt[] = {1, 2, 3, 0};
18      int wu = 5;
19      int n = sizeof(val)/sizeof(val[0]) - 1;
20      printf("Final result: %d\n", knap_sack(n, wu, wt, val));
21      return 0;
22  }
```