線形相補性条件を用いた最適制御アルゴリズム

学籍番号:09C09701　大塚研究室　内田　健斗

1　はじめに

最適制御問題はシステムの数学モデルと目的に応じた評価関数を設定し，最適化理論を用いて最適な制御入力を導出する手法であり，多種多様なシステムを統一的に扱うことができ，広く応用の可能な手法として利用されている．

最適制御問題において制御対象の数学モデルが不等式拘束を含む場合，サブ問題を生成し，それを解くことで制御入力を決定するため，解の精度はサブ問題のパラメータに依存し，厳密な最適制御を行うのは困難である．本研究では最適性条件を線形相補性条件として再定式化し，直接，不等式拘束を満たす制御入力を導出する．また，シミュレーションにより従来手法との比較を行い，提案手法の有用性を示す．

2　最適性条件とアルゴリズム概要

モデルとして，以下のような不等式拘束を含む固定区間最適制御問題を考える．

$$\begin{aligned}\min \quad & J=\int_{t_0}^{t_f} L(x(t),u(t))dt+\phi(x(t_f))\\ \text{sub.to} \quad & \dot{x}=f(x,u)\\ & C(x,u)\le 0\\ & x(t_0)=x_0\end{aligned}$$

この問題に対する最適性条件は変分法を用いて導出される．ハミルトニアンを $H=L+\lambda^T f+\mu^T C$ と定義し，λ,μ を共状態量およびラグランジュ乗数とすれば，最適性条件は以下のようにあらわされる．

$$\dot{x}=f(x,u), \qquad x(t_0)=x_0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t}=-\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T, \qquad \lambda(t_f)=\left[\frac{\partial\phi}{\partial x}(x(t_f))\right]^T \tag{2}$$

$$C(x,u)\le 0, \qquad \mu\ge 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}=0, \qquad \mu^T C(x,u)=0 \tag{4}$$

制御入力を u,μ とすれば，適当な u,μ を与えれば，式 (1) から，x が順時間に決まり，式 (2) から λ が逆時間に決まる．すなわち，最適性は式 (3)(4) を満たすか否かによって判断される．よって，評価区間 T を分割数 N で離散化し，各時刻 $t_i, i=0,1,...,N$ でノミナルな入力 u_i,μ_i を与え，x_i,λ_i を計算し，式 (3)(4) を満たすような微小修正量 $\delta u_i,\delta\mu_i$ を考えれば，最適性条件は，

$$\begin{aligned}&\mu_i+\delta\mu_i\ge 0\\ &C(x_i+\delta x_i,u_i+\delta u_i)\le 0\\ &(\mu_i+\delta\mu_i)^T C(x_i+\delta x_i,u_i+\delta u_i)=0\\ &\frac{\partial H}{\partial u}(x_i+\delta x_i,u_i+\delta u_i,\mu_i+\delta\mu_i,\lambda_i+\delta\lambda_i)=0\end{aligned} \tag{5}$$

が各 i について成り立つこととなる．x,λ の微小変化量はそれぞれ，$\delta x_i=\mathbf{A}_i\delta\bar{u}_N, \delta\lambda_i=\mathbf{B}_i\delta\bar{u}_N+\mathbf{C}_i\delta\bar{\mu}_N$ で表わされる．ただし，$\delta\bar{u}_N=[(\delta u_0)^T,...,(\delta u_N)^T]^T$, $\delta\bar{\mu}_N=[(\delta\mu_0)^T,...,(\delta\mu_N)^T]^T$ である．式 (5) において $\partial H/\partial u, C(x,u)$ それぞれを一次近似し，各時刻 i での最適性条件を行列形式でまとめて表現すると，

$$\delta\bar{u}_N=-\mathbf{D}^{-1}\mathbf{E}-\mathbf{D}^{-1}\mathbf{F}\delta\bar{\mu}_N \tag{6}$$

$$\bar{\mu}_N+\delta\bar{\mu}_N\ge 0 \tag{7}$$

$$\mathbf{G}(\mu_N+\delta\bar{\mu}_N)+\mathbf{H}\ge 0 \tag{8}$$

$$(\bar{\mu}_N+\delta\bar{\mu}_N)^T\{\mathbf{G}(\bar{\mu}_N+\delta\bar{\mu}_N)+\mathbf{H}\}=0 \tag{9}$$

とあらわせる．なお，$\bar{\mu}_N=[(\mu_0)^T,...,(\mu_N)^T]^T$ であり，各 $\mathbf{A}_i,\mathbf{B}_i,...$ の詳細は省略する．このとき，式 (6)–(8) は線形相補性問題となっており，内点法などを用いて効率的に解くことが可能である．よって，ノミナルな値を与え，式 (6)–(9) を解くことを，$\partial H/\partial u$ が十分小さくなるまで繰り返し，最適入力を導出することが制御アルゴリズムの概要となる．本研究では線形相補性問題の解法として主双対パス追跡法を線形相補性問題に拡張したアルゴリズムを用いた [1]. 紙面の都合上，解法の詳細については省略する．

以上のアルゴリズムを Receding Horizon(RH) 制御に拡張する．RH 制御とは，評価関数を以下の

$$\int_t^{t+T} L(x(t'),u(t'))dt'+\phi(x(t+T)) \tag{10}$$

として，評価区間を移動させながら仮想的な時間変化を考えて最適制御をおこなうことで，継続的な最適制御を行う制御手法である．このとき，各時刻で解くべき問題は固定区間最適制御問題に帰着される．よって，アルゴリズムの概要は，各時刻で式 (6)–(9) を解き，導出された最適入力の内，その初期値を実際の入力として与えるものとなる．

3　シミュレーション

提案手法の有用性を示すために従来手法の一つであるダミー変数法との比較シミュレーションを行う．モデルとして以下の入力拘束を含む非線形ばねモデル [2] を用いる．

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\ \{1-a_0(x_1^2+x_2^2)\}x_2-x_1+u\end{bmatrix} \tag{11}$$

$$-0.5\le u\le 0.5 \quad \Leftrightarrow \quad u^2\le 0.5^2 \tag{12}$$

従来手法では不等式拘束をダミー変数 d を用いて $u^2+d^2-0.5^2=0$ という等式拘束に変換する．評価関数は

$$\begin{aligned}J \;=\; &\int_t^{t+T}\left((x(t'))^T Qx(t')+R(u(t'))^2\right)dt'\\ &+x(t+T)S_f x(t+T)\end{aligned}$$

とし，RH 制御を行う．ホライズン長さ $T=1$[sec]，分割数 $N=10$，重みをケース 1：$Q=\mathrm{diag}(50,50), R=50$, ケース 2：$Q=\mathrm{diag}(500,500), R=1$ という 2 つの場合のシミュレーションを行う．ただし，どちらも $S_f=I$ とする．従来手法は C/GMRES 法 [3] を用いてシミュレーションを行い，入力の更新は 0.005[sec] ごとに行う．また，ダミー変数の重み $R_d=0.01$ とする．提案手法では MTLAB を用いてコーディングし $\partial H/\partial u<10^{-3}$ となるまで反復を繰り返す．また，入力の更新は 0.1[sec] ごとに行う．初期状態を $(1,2)$ とした時の 15 秒間のシミュレーション結果のうち状態 x_1 と入力 u を Fig.1 に示す．

シミュレーション結果を見れば，ケース 1 の場合，従来手法よりも提案手法の方が厳密な入力を導出できていることが分かる．また，状態の目標値への収束も提案手法の方が早く，評価関数の総和についても提案手法 4.44×10^3, 従来手法 4.55×10^3 と提案手法の方がよりよい制御入力を導出できている．また，ケース 2 については従来手法では計算が破たんしてしまいシミュレーションできなかった．しかし，提案手法ではシミュレーション可能となり，提案手法が従来手法よりも幅の広いシミュレーションパラメータを扱えることが解った．

4　まとめ

不等式拘束を含む最適制御問題の最適性条件を線形相補性問題とし定式化した．主双対パス追跡法を用いて線形相補性問題を解くことで厳密な最適制御入力を導出することができた．従来手法との比較により，提案手法が従来手法に比べ精度の高い制御入力を導出できることを示した．

参考文献

1) 水野眞治：学習用テキスト 線形計画法 (10) 線形相補性問題，`http://www.me.titech.ac.jp/~mizu_lab/text/`, 2010
2) 嘉納秀明：システムの最適理論と最適化, 217, コロナ社, 1987
3) T. Ohtsuka：A Continuation/GMRES Method for Fast Computation of Nonlinear Receding Horizon Control, *Automatica*, 40, 4, 563-574, 2004

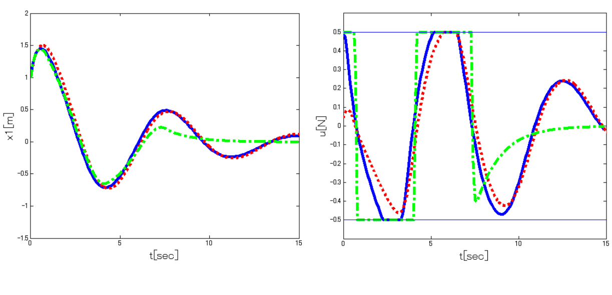

Fig. 1　シミュレーション結果，実線：提案手法 (ケース 1)，破線：従来手法 (ケース 1)，鎖線：提案手法 (ケース 2)