連続時間モデル予測制御における定常偏差除去

学籍番号：09C07063　大塚研究室　櫻井 優太

1　はじめに

モデル予測制御 (MPC) は，動的モデルに基づき各時刻で有限時間未来までの応答を最適化する制御手法であり，拘束条件を陽に扱えるなどの特長がある．従来，定常偏差を除去するためには，出力と同次元の外乱をモデルに組み込む必要があった [1]．Maeder らは，離散時間 MPC において定常偏差なしで追従したい制御変数と同次元の外乱のみの導入で定常偏差が除去できるアルゴリズムを導いた [2]．本論文では，これを連続時間 MPC に拡張することを目的とする．

2　問題設定

プラントとして連続時間時不変システム

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{x}_m(t)=f(x_m(t),u(t))\\ y_m(t)=g(x_m(t))\\ z(t)=Hy_m(t)\end{array}\right. \tag{1}$$

を考える．拘束条件は $E_1x_m(t)+E_2u(t)\le M$ とする．ここで，$x_m(t)\in\mathbb{R}^n$, $u(t)\in\mathbb{R}^m$, $y_m(t)\in\mathbb{R}^p$, $z(t)\in\mathbb{R}^r$ はそれぞれ，状態，入力，観測出力，制御出力である．また，$r(t)\in\mathbb{R}^r$ は一定値に収束する参照信号とし，$z(t)$ が $r(t)$ に追従することを制御目標とする．MPC では式 (1) に対し，線形時不変モデル

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)\\ y(t)=Cx(t)\end{array}\right. \tag{2}$$

を用いる．このモデルはプラントとの不整合を捉えるため，仮想外乱を導入したモデル (以下，拡張モデル) に拡張される．ここでは参考文献 [1] のモデルに従う．

$$\left\{\begin{array}{l}\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{d}(t)\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}A & B_d\\ O & O\end{bmatrix}}_{A_m}\begin{bmatrix}x(t)\\ d(t)\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}B\\ 0\end{bmatrix}}_{B_m}u(t)\\ y(t)=\underbrace{\begin{bmatrix}C & C_d\end{bmatrix}}_{C_m}\begin{bmatrix}x(t)\\ d(t)\end{bmatrix}\end{array}\right. \tag{3}$$

ここで，$d(t)\in\mathbb{R}^{n_d}$ は未知外乱である．また，拡張モデル (3) に対するオブザーバは，オブザーバゲインを $L=[\,L_x^{\mathrm{T}}\ L_d^{\mathrm{T}}\,]^{\mathrm{T}}$ とした同一次元状態オブザーバとする．オブザーバでは状態と外乱の両方を推定し，推定値は MPC の初期化と目標状態の導出機構 (SSTO) に用いられる．

MPC は次のように設計される．

$$\begin{aligned}&\min_{u_M(\tau)\ t\le\tau\le t+T}\ ||x(t+T)-\bar{x}_t||_P^2\\ &\quad+\int_t^{t+T}\{||x(\tau)-\bar{x}_t||_Q^2+||u_M(\tau)-\bar{u}_t||_R^2\}\,\mathrm{d}\tau\\ &\text{sub. to } E_1x(\tau)+E_2u_M(\tau)\le M,\ \ t\le\tau\le t+T\\ &\qquad\dot{x}(\tau)=Ax(\tau)+Bu_M(\tau)+B_dd(\tau),\ t\le\tau\le t+T\\ &\qquad\dot{d}(\tau)=0,\ \ t\le\tau\le t+T\\ &\qquad x(t)=\hat{x}(t),\ \ d(t)=\hat{d}(t)\end{aligned} \tag{4}$$

評価関数における $\bar{x}_t$,$\bar{u}_t$ は状態と入力の目標値であり，SSTO

$$\begin{bmatrix}A & B\\ HC & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_t\\ \bar{u}_t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-B_d\hat{d}(t)\\ r(t)-HC_d\hat{d}(t)\end{bmatrix} \tag{5}$$

で計算される．ここで，$||x||_M^2\triangleq x^{\mathrm{T}}Mx, Q\ge 0, R>0$ であり，P はリッカチ方程式

$$PA+A^{\mathrm{T}}P-PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P+Q=0 \tag{6}$$

の正定解とする．$U^*(t)=\{u_M^*(\tau)|\ t\le\tau\le t+T\}$ が MPC(4) の最適解であるとする．このとき，$U^*(t)$ の最初の値 $u_M^*(t)$ がシステム (1) に適用される．Fig.1 はプラント，オブザーバ，MPC，SSTO を組み合わせた全体の構成図である．

3　定常偏差ゼロの条件と提案アルゴリズム

導出は紙面の都合上省略するが，MPC(4) において，制御変数が定常偏差ゼロを達成するためにオブザーバゲインが満たすべき条件は

$$\mathcal{N}(L_d)\subset\mathcal{N}\left(H(I+C(A+BK_{\mathrm{MPC}})^{-1}L_x)\right) \tag{7}$$

である．ここで，K_{MPC} は定常状態で拘束が有効でない場合のフィードバックゲインで，リッカチ方程式 (6) の正定解を用いて

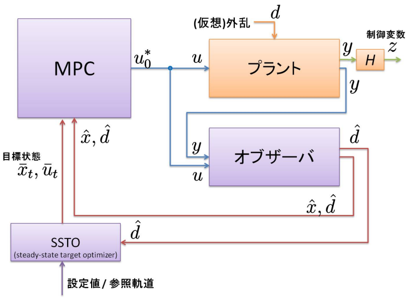

Fig. 1　全体の構成

$K_{\mathrm{MPC}}=-R^{-1}B^{\mathrm{T}}P$ と計算される．条件 (7) を満たすオブザーバゲイン $L=[\,L_x^{\mathrm{T}}\ L_d^{\mathrm{T}}\,]^{\mathrm{T}}$ を構成するアルゴリズムは以下のように得られる．

<アルゴリズム>

対 (C_m,A_m) が可検出であるとする．

1. $A+\tilde{L}_xC$ が安定で，$(\bar{H}C_m,\bar{A})$ が可検出であるように $\tilde{L}_x$ を選ぶ．ここで，$\bar{H}=H(I+C\Phi^{-1}\tilde{L}_x)$ で，$\bar{A}=A_m+[\,\tilde{L}_x^{\mathrm{T}}\ 0\,]^{\mathrm{T}}C_m$ である．
2. $\bar{A}+\bar{L}\bar{H}C_m$ が安定であるように $\bar{L}$ ($\bar{L}=[\,\bar{L}_x^{\mathrm{T}}\ \bar{L}_d^{\mathrm{T}}\,]^{\mathrm{T}}$) を選ぶ．
3. 最終的に，オブザーバゲイン L を次のように選ぶ．

$$L=\begin{bmatrix}\tilde{L}_x\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bar{L}_x\\ \bar{L}_d\end{bmatrix}\bar{H}$$

4　シミュレーション

Fig.2 は非線形タンクシステムのモデルプラントミスマッチを想定したシミュレーション結果である．モデルを平衡点まわりで線形化し，偏差系を考え，Δx_2 のみに目標値 0.1 を与えている．2 節で定式化した MPC において，オブザーバゲインを提案アルゴリズムで求めたものと，定常カルマンフィルタゲインを用いたものとを比較している．定常カルマンフィルタの方は，定常偏差を示しているのに対し，提案手法では，定常偏差を除去できていることが確認できる．

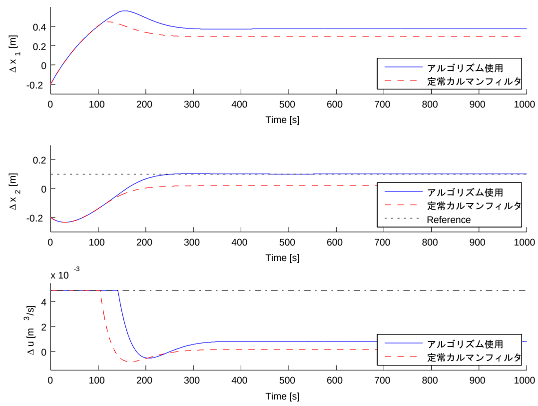

Fig. 2　タンクシステム (偏差系) のシミュレーション結果

5　おわりに

離散時間の場合の理論を自然に連続時間に拡張することができた．シミュレーションにより提案手法の有効性を確認できた．今回は参照軌道が一定値に収束するものとしたが，今後の課題としては，ランプ信号などに追従できるように外乱モデルを一般化することなどが考えられる．

参考文献

1) G. Pannocchia, J.B. Rawlings: Disturbance Models for Offset-Free Model-Predictive Control, AIChE Journal, Vol.49, No.2, pp. 426-437 (2003)

2) U. Maeder, M. Morari: Linear Offset-Free Model Predictive Control, Automatica, Vol.45, No.10, pp. 2214-2222 (2009)