拡散分布定数系の推定と制御

大塚研究室　90138165　吉岡　佑輔

1　はじめに

本稿では放物型偏微分方程式の一種である拡散方程式で記述されるシステムを制御対象としている．その中でも，拡散係数が非線形である場合について考察する．拡散係数の非線形性には，空間のみに依存する場合と，状態に依存する場合の2つが考えられる．空間のみに依存する場合は，半群作用素による表現から，固有値，固有関数を用いてシステムを有限化し，リアプノフの安定性より制御入力を決定する方法 [1] など様々な手法が提案されている．しかし，拡散係数が状態に依存する場合を考慮した研究は極めて少なく，また，その場合に対する最適制御手法は提案されていない．そこで，本研究では，拡散係数が状態に依存する非線形拡散分布定数系に対して，実時間で最適制御および推定を行う手法を提案する．

本稿で提案する手法は，ホットストリップミルの冷却制御 [2] や電磁型締め装置の制御 [3] など拡散方程式で記述される多くのシステムに適用可能である．

2　Receding Horizon 制御

最適制御手法には，Receding Horizon(RH) 制御を適用する．RH 制御は，各時刻で有限時間未来までを評価区間とする最適制御問題を解くことで，フィードバック制御を行う手法である．評価区間が時間とともに移動していくので，最適化計算を継続的に行えるという利点がある．この最適化問題の定式化により，無限次元の拘束条件と停留条件を導出し，それらを解く手法を検討する．

$x \in \mathbb{R}$ は空間を表す変数，$t \in \mathbb{R}_+$ は時間を表す変数とする．また，システムの状態変数を $z(x,t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ で表す．Ω を x の領域，Γ を Ω 内の制御入力を加えることができる領域とすると，制御対象として扱うシステムは，

$$\frac{\partial z(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(b(z(x,t))\frac{\partial z(x,t)}{\partial x}\right) + u(x,t) \quad ,x \in \Omega, \forall t \quad (1)$$

$$u(x,t) = \begin{cases} u(x,t) & ,x \in \Gamma, \forall t \\ 0 & ,x \in \Omega \backslash \Gamma, \forall t \end{cases} \quad (2)$$

と表される．このシステムに対して，ラグランジュ乗数を導入し，評価関数の定式化を行い，変分法を用いて，最適化問題の停留条件と拘束条件を導出する．これらの停留条件と拘束条件は無限次元であり，空間方向に連続な制御入力が必要となる．しかし，そのようなアクチュエータは実現し難い場合が多く，また，無限次元の条件を解析的に解くことは困難であるため，数値解法に頼らざるを得ない．以上の理由から，無限次元の条件をクランクニコルソン法で離散化することで，有限次元の拘束条件と停留条件を導出する．そして，それらを解くことによって，有限次元の最適制御入力を決定する．

実時間で最適制御を行うためには，この最適化問題を高速に解くアルゴリズムが必要である．近年，連続変形法を用いた高速な解法アルゴリズムとして C/GMRES 法 [4] が開発されている．本稿では，C/GMRES 法より，さらに計算量が低減された最適化問題解法アルゴリズムとして，簡易型連続変形法を提案する．

3　簡易型連続変形法

$\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}_+$ に依存する未知量 $\mathbf{U(t)} \in \mathbb{R}^M$ を用いた停留条件を $\mathbf{F(U(t), z(t), t)}$ とした場合，最適性を保つために，各時刻において，$\mathbf{F} = 0$ である必要がある．そこで，$\mathbf{U}$ の時間変化量 $\dot{\mathbf{U}}$ を計算し，$\mathbf{F} = 0$ が安定となるように，$\mathbf{U}(t)$ を更新していくことを考える．ここで，停留条件が

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}, \mathbf{z}, t) = \mathbf{A}\mathbf{U} - \mathbf{b}(\mathbf{U}, \mathbf{z}, t) \quad (3)$$

という特殊な場合で，$\mathbf{A}$ は正則で，逆行列が存在する場合を考える．さらに，$\mathbf{b}$ がリプシッツ連続，すなわち，適当な定数 $L_1, L_2, L_3 > 0$ が存在して，

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{b}(\hat{\mathbf{U}}, \hat{\mathbf{z}}, t) - \mathbf{b}(\mathbf{U}, \mathbf{z}, t)\| \\ &\quad \le L_1\|\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U}\| + L_2\|\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z}\| + L_3\|\hat{t} - t\| \end{aligned} \quad (4)$$

が成り立つと仮定する．ここで，$\mathbf{U}_{i+1}$ が

$$\mathbf{U}_{i+1} = \mathbf{U}_i - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}_i \quad (5)$$

のように更新される場合について考える．このとき，$\mathbf{F}_i$ が $\mathbf{F}_{i+1}$ にどのような影響を与えるのかを考察する．

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{i+1} &= \mathbf{A}\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{b}(\mathbf{U}_{i+1}, \mathbf{z}_{i+1}, t_{i+1}) \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{U}_i - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}_i) - \mathbf{b}(\mathbf{U}_{i+1}, \mathbf{z}_{i+1}, t_{i+1}) \\ &= \mathbf{b}(\mathbf{U}_i, \mathbf{z}_i, t_i) - \mathbf{b}(\mathbf{U}_{i+1}, \mathbf{z}_{i+1}, t_{i+1}) \end{aligned} \quad (6)$$

$\Delta t = t_{i+1} - t_i > 0$，$\|\mathbf{z}_{i+1} - \mathbf{z}_i\| \le M\Delta t \ (M > 0)$ を用いて，

$$\begin{aligned}\|\mathbf{F}_{i+1}\| &\le \|\mathbf{b}(\mathbf{U}_i, \mathbf{z}_i, t_i) - \mathbf{b}(\mathbf{U}_{i+1}, \mathbf{z}_{i+1}, t_{i+1})\| \\ &\le L_1\|\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_i\| + L_2\|\mathbf{z}_{i+1} - \mathbf{z}_i\| + L_3\|t_{i+1} - t_i\| \\ &\le L_1\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}_i\| + (L_2M + L_3)\Delta t \\ &\le L_1\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{F}_i\| + (L_2M + L_3)\Delta t \end{aligned} \quad (7)$$

と変形できる．ここから，$L_1\|\mathbf{A}^{-1}\| < 1$ であれば，$\mathbf{F} = 0$ は安定であることがわかる．よって，この安定条件を満しているとき，$\dot{\mathbf{U}} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}$ を用いて，$\mathbf{U}$ の更新を行うと，$\mathbf{F} = 0$ は安定であることが保障される．簡易型連続変形法は安定条件が比較的厳しいが，$\mathbf{A}^{-1}$ が容易に計算できる場合，大幅な計算量の削減が期待できる．

4　Moving Horizon 推定

状態量は空間的に分布しているが，空間全体を観測できないシステムが多く存在する．そこで，センサの出力から部分的に得られた状態量の情報を用いて，状態全体を推定する方法として，Moving Horizon(MH) 推定を提案する．MH 推定は，各時刻で有限時間過去から現在までの観測値と入力値を用いて，最適推定を行い，終端時刻である現在の時刻の状態推定値を計算する方法である．RH 制御との違いは，評価区間が反転している点のみで，RH 制御とほぼ同じ解法を用いることができる．

5　数値シミュレーション

Fig.1 は実システムの時間応答を表し，Fig.2 は推定誤差の時間応答を表している．拡散係数を $b = 5/z$ とし，観測点と入力点を空間座標 [0,0.25,0.5,0.75,1] としている．推定値は，観測点で得られたデータを用いて MH 推定を行い，全体の状態を推定している．真値と推定値の誤差が十分小さくなった時刻から，推定値を用いて RH 制御を行い，決定した入力を入力点に加えている．ここでは，目標状態を 500 としており，Fig.1 より，入力によって，状態が目標状態に収束しているのがわかる．また，Fig.2 から真値と推定値の誤差が 0 に収束しているのがわかる．

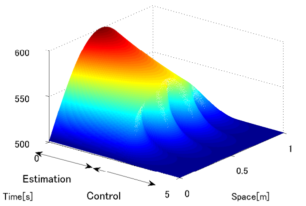

Fig. 1: 実システムの時間応答

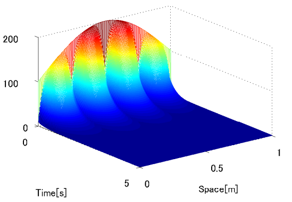

Fig. 2: 推定誤差の時間応答

6　おわりに

本研究では，拡散係数が状態に依存する場合の非線形拡散方程式に対して，推定および制御を行う手法を提案した．最適制御には RH 制御，最適推定には MH 法を適用した．最適化問題を定式化し，変分法を用いて得られた拘束条件と停留条件を離散化することで，有限化された拘束条件と停留条件を導出した．それらを解くことで，最適制御則および推定則を決定した．また，この最適化問題を高速に解く方法として，簡易型連続変形法を提案した．

数値シミュレーションの結果より，提案手法が非線形分布定数系に対して，有効であることを確認された．

今回は一次元拡散方程式を扱ったが，高次元システムへの拡張が今後の課題である．また，実時間での制御を目標としたが，空間の分割数を 200 とした場合，制御周期あたりの計算時間が 0.4[sec] ほどかかったので，より一層のアルゴリズムの高速化が今後の課題である．

参考文献

1) 宮里義彦：放物型分布定数系の有限次元モデル規範型適応制御，計測自動制御学会論文集，Vol.26，No.6，662/668，(1990)

2) 中川繁政・橘久好：ホットストリップミルにおける鋼板の高精度ダイナミック冷却履歴制御，計測自動制御学会論文集，Vol.45，No.4，233/240，(2009)

3) 石崎孝幸・加嶋健司ら：電磁型締め装置の分布定数モデリングと制御，計測自動制御学会論文集，Vol.45，No.10，502/511，(2009)

4) T.Ohtsuka：A Continuation/GMRES Method for Fast Computation of Nonlinear Receding Horizon Control，Automatica，Vol.40，563/574，(2004)