確率密度関数に対する最適制御の問題設定と数値解法

学籍番号：09C08701　大塚研究室　大角洸平

1　はじめに

鉄鋼プロセスのような多くの産業プロセスでは，完成した製品がすべて設計通りの品質を保持していることが望ましく，品質のばらつき抑制が重要である．そこで，ばらつきの制御として状態のばらつきを確率密度関数で表現し，確率密度関数の最適制御を行う．本研究では，確率密度関数に対する最適制御問題を定式化し，その数値解法を示す．また，そのシミュレーション結果から本制御手法の有効性を検討する．

2　確率密度関数のダイナミクス

対象システムをつぎの非線形状態方程式で記述する．

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \tag{1}$$

ただし，$x(t) = [\ x_1 \ \ \cdots \ \ x_n \ ]^{\mathrm{T}} \in \mathcal{D}_x \subset \mathbb{R}^n$，$u(t) = [\ u_1 \ \ \cdots \ \ u_m \ ]^{\mathrm{T}} \in \mathcal{D}_u \subset \mathbb{R}^m$ は，それぞれ状態，制御入力を表すベクトルであり，関数 $f = [\ f_1 \ \ \cdots \ \ f_n \ ]^{\mathrm{T}}$ は領域 $\mathcal{D}_x$ で定義されたベクトル値関数である．また，本稿で扱う関数はすべて必要なだけ微分可能とする．

本研究では，時刻 t での状態 $x(t)$ のばらつきを確率密度関数 $p(x,t) \in \mathbb{R}$ で表す．初期時刻を t_0 として，確率密度関数の初期条件と境界条件をつぎのように与える．

$$\begin{cases} p(x, t_0) \ = \ p_0(x) \\ p(x,t) = 0 \quad (\forall x \in \partial\mathcal{D}_x,\ \forall t \geq t_0) \end{cases} \tag{2}$$

ただし，$\partial\mathcal{D}_x$ は領域 $\mathcal{D}_x$ の境界を表す．

確率密度関数の時間発展方程式は，外乱の影響のないコルモゴロフの前向き方程式 [1] として定式化でき，次式となる．

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\big(p(x,t) f_i(x(t), u(t), t)\big)}{\partial x_i} = 0 \tag{3}$$

したがって本研究では，式 (2)，(3) で記述される確率密度関数が制御対象である．

3　非線形 Receding Horizon 制御の問題設定

確率密度関数に対する最適制御手法として Receding Horizon (RH) 制御を適用する．RH 制御は，各時刻において有限時間未来までの応答を最適化し，その評価区間を後退させて最適制御を継続させるフィードバック最適制御手法である．

一般的に，RH 制御における確率密度関数に対する評価関数は，汎関数 φ, L を用いてつぎのように表せる．

$$J = \varphi[p, t+T] + \int_t^{t+T} L[p, u, \tau]\ d\tau \tag{4}$$

ただし，T は評価区間の長さを表し，RH 制御における仮想的な時間には τ を用いて実時間 t と区別している．RH 制御では，各時刻 t で式 (4) を最適化する入力 $u_{opt}(\tau)(\tau \in [t, t+T])$ を求め，実際の制御入力を $u(t) = u_{opt}(t)$ で与える．

本研究では，汎関数 φ, L を確率密度関数の平均と分散を評価する関数として定義し，最適性の必要条件を導出した．したがって RH 制御では，その最適性条件を満たす入力を各時刻で求め，実際の制御入力をその初期値として与える．

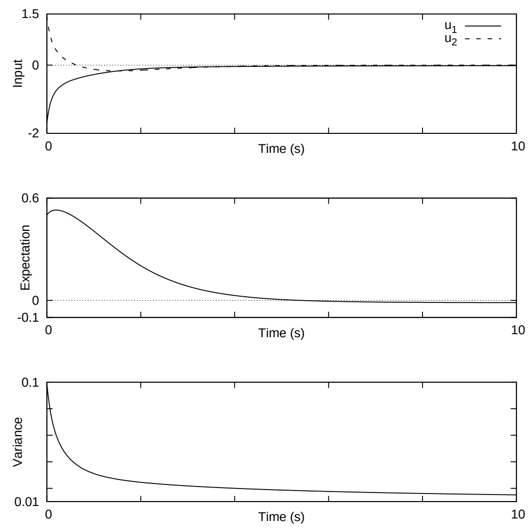

図 1: 制御入力と確率密度関数の特徴量の時間変化

4　シミュレーション

つぎの 1 次元非線形システムに対して確率密度関数の RH 制御を適用し，シミュレーションを行う．

$$\dot{x} = \sin(x)u_1(t) + \cos(x)u_2(t) \tag{5}$$

このシステムの確率密度関数の発展方程式は次式である．

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = &- \frac{\partial p(x,t)}{\partial x}\big(\sin(x)u_1 + \cos(x)u_2\big) \\ &- p(x,t)\big(\cos(x)u_1 - \sin(x)u_2\big) \end{aligned} \tag{6}$$

RH 制御の計算アルゴリズムには，C/GMRES[2] を用いる．シミュレーション条件として初期分布には，平均 $\mu_0 = 0.5$，分散 $v_0 = 0.1$ の 1 次元正規分布を与え，目標値を $\hat{\mu} = 0$, $\hat{v} = 0.01$ とする．また，サンプリング時間を $\Delta t = 0.001$(s)，状態空間を $\mathcal{D}_x = [-2, 2]$，$\Delta x = 0.005$ とした．RH 制御における評価区間の長さを $T = 0.1$(s) とし，10(s) の RH 制御シミュレーションを行った．シミュレーション結果を図 1 に示す．

シミュレーション結果より，平均と分散をそれぞれ目標値に近づける制御が達成できていることがわかる．また，時刻 10(s) での各値は目標値と完全には一致していないが，この誤差はシミュレーションパラメータを調節することである程度改善することができる．

5　おわりに

本研究では，確率密度関数に対する最適制御問題を定式化し，その数値解法を示した．適用例として，シミュレーション結果から本制御手法の有効性を示した．

本稿では，平均と分散それぞれを目標値に近づけることができたシミュレーション結果を示したが，それが不可能な対象システムもあった．今後は確率密度関数に対する制御性能の解明が必要である．

参考文献

1) A. H. Jazwinski : *Stochastic Processes and Filtering Theory*, Dover Publications (2007)

2) T. Ohtsuka : A Continuation/GMRES Method for Fast Computation of Nonlinear Receding Horizon Control, *Automatica*, 40–4, 563/574 (2004)