オフラインでの特異値分解に基づいた
非線形 Receding Horizon 制御の実時間アルゴリズム

学籍番号：90198003　大塚研究室　赤山慶太

1　はじめに

非線形 Receding Horizon(RH) 制御とは，各時刻において有限時間未来までの応答を最適化する制御手法である．非線形 RH 制御の主な研究主題として閉ループ系の安定性解析と実時間アルゴリズムがある．本研究では実時間アルゴリズムを研究主題とし，実時間アルゴリズムとして C/GMRES を扱う．C/GMRES は，各サンプリング周期間で連立 1 次方程式を一回解くだけで最適制御入力を更新でき，通常の最適化計算は必要ない．またノイズにも強いといった特徴からミリ秒単位の計算時間での実装が可能なアルゴリズムとなっている．本研究では C/GMRES の計算を更に高速化させるために，オフラインでの計算結果を利用した C/GMRES の定式化の変更を提案する．

2　C/GRMES

システムの状態方程式を $\dot{x} = f(x(t), u(t))$，状態や入力の代数的拘束を $C(x(t), u(t)) = 0$ とする．RH 制御では評価関数を $J = \phi(x(t+T)) + \int_t^{t+T} L(x,u)dt'$ として最適制御入力を決定する．ハミルトニアン $H = L(x,u) + \lambda^{\mathrm{T}} f(x,u) + \mu^{\mathrm{T}} C(x,u)$ を用いて評価関数を拡張し，変分法により最適性の必要条件 (評価関数の停留条件) を導出する．さらに評価区間 $[t, t+T]$ を N ステップに分割することで離散化された停留条件は以下のように表される．なお，$\Delta\tau = T/N$ は評価区間分割幅であり，以下の式では各変数の引数 t を表記簡略化のため必要に応じて省略する．

$$x_{i+1}^* = x_i^* + f(x_i^*, u_i^*)\Delta\tau, \quad x_0^* = x(t) \tag{1}$$

$$\lambda_i^* = \lambda_{i+1}^* + H_x^{\mathrm{T}}(x_i^*, \lambda_{i+1}^*, u_i^*, \mu_i^*)\Delta\tau, \quad \lambda_N^* = \phi_x^{\mathrm{T}}(x_N^*) \tag{2}$$

$$H_u^{\mathrm{T}}(x_i^*, \lambda_{i+1}^*, u_i^*, \mu_i^*) = 0, \quad C(x_i^*, u_i^*) = 0 \tag{3}$$

ここで時刻 t における制御入力とラグランジュ乗数の全 N ステップの系列をまとめたベクトル $U(t) \triangleq [u_0^{*\mathrm{T}}(t)\ \mu_0^{*\mathrm{T}}(t)\ \cdots\ u_{N-1}^{*\mathrm{T}}(t)\ \mu_{N-1}^{*\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{mN}$ を定義する (m は入力とラグランジュ乗数の次元の和)．従来の C/GMRES では，$\{x_i^*(t)\}_{i=0}^N, \{\lambda_i^*(t)\}_{i=0}^N$ は (1) 式，(2) 式から決まる $U(t)$ の関数ととらえる．すると，求めるべき未知変数は $U(t)$ となり，$U(t)$ は (3) 式を全ステップ分まとめて表される $U(t)$ と同じサイズの方程式 $F(U(t), x(t), t) = 0$ を解くことで求められる．$U(t)$ を求めたら，$u(t) = u_0^*(t)$ により制御入力 $u(t)$ を決定する．C/GMRES では $F = 0$ に対し，各時刻で $\dot{F} = -\zeta F$ を満たすように $\dot{U}(t)$ を求め，$\dot{U}(t)$ をオイラー法などによって実時間で数値積分することで $U(t)$ を更新する．なお $\zeta \in \mathbb{R}_+$ であり，F が 0 からずれていても，時刻とともにずれは減衰し $F = 0$ は安定化される．これは時刻 t をパラメータとした連続変形法となっている．また $\dot{F} = -\zeta F$ は $\dot{U}(t)$ に関する連立 1 次方程式に変形でき，連立 1 次方程式の解法である GMRES 法により効率的に解くことができる．GMRES では未知変数の次元に等しい回数の反復で解の収束が保証される．以上，連続変形法と GMRES を組み合わせたアルゴリズムが C/GMRES である．

3　特異値分解に基づく C/GRMES 定式化変更

C/GMRES において全計算量の大部分を占めるのが GRMES の計算量である．本研究では GMRES で解くべき方程式の次元を低減することで GMRES の計算量の削減を行う．システムの初期状態が限定されている場合を考えると，オフラインでの最適化計算の結果からどの程度次元を低減できるか見積もることができる．そこでオフラインでの C/GMERS の計算から得られる入力時系列行列に特異値分解を適用する．特異値分解により元の行列を低階数の行列で近似できることを利用し，特異値分解で得られる入力系列の正規直行基底から重要度の高い基底を選び，それらの基底から構成される行列 $P \in \mathbb{R}^{mN \times mN'}$ とベクトル $V(t) \in \mathbb{R}^{mN'}$ を用いて $U(t) = PV(t)$ として $U(t)$ を近似する．ここで $V(t)$ を $U(t)$ に代わる新たな未知変数とみなす．なお $V(t)$ は $U(t)$ よりも低次元 $(N' < N)$ のベクトルである．また $V(t)$ に関する方程式は $V(t)$ と同じサイズの $P^{\mathrm{T}}F = 0$ として表される．そこで，従来手法において GMRES を適用した方程式 $F = 0$ を $P^{\mathrm{T}}F = 0$ に変更し，得られる解 $V(t)$ から $U(t) = PV(t)$ により元の入力系列を求め，$u(t) = u_0^*(t)$ により制御入力を求める定式化に変更することを提案する．提案手法では GMRES で解くべき方程式の次元が mN から mN' に減少し，それに伴い GMRES で必要な反復回数も減少したものとなっている．

4　シミュレーション

制御対象として，6 状態 2 入力であり拘束条件のないホバークラフトを取り上げる．ここで $m = 2$ であり，ステップ分割数を $N = 10$ とした．$N' = 6$ とした場合の提案手法と従来手法それぞれについて，状態量の一つであるホバークラフトの x 軸方向の重心位置のシミュレーション波形を図 1 に示す．なお，GMRES はそれぞれ最大回数行った．図 1 より提案手法の波形は従来手法の波形とほぼ一致した．その他の状態についても波形は一致した．また制御入力更新に必要な時間は提案手法では 0.137[msec]，従来手法では 0.202[msec] となり連立 1 次方程式の次元削減により計算を高速化させることができた．計算精度として $\|F\|^2$ のシミュレーション時間内における平均値を比較すると，提案手法では 1.565×10^{-3}，従来手法では 1.562×10^{-3} となった．また，方程式の次元を更に低減させた場合，入力更新時間は更に短くなるが．それに伴い計算精度は悪化してしまうという結果を得た．

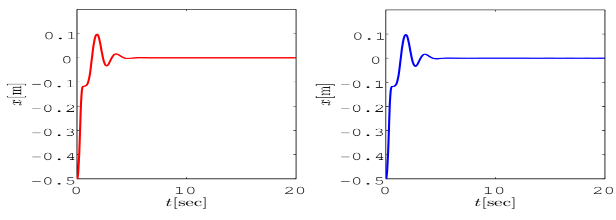

図 1: シミュレーション結果（左図：従来手法，右図：提案手法）

5　おわりに

本研究では，非線形 RH 制御の実時間アルゴリズムである C/GMRES のオフラインでの計算結果に基づいた定式化の変更を提案した．シミュレーション結果より，GMRES で解く問題の次元低減により計算を高速化させることができた．今回提案した定式化では状態や入力の拘束条件を陽に扱っていないため，拘束条件が破られないようにいかに拘束条件を扱うかが今後の課題である．