知識の更新と情報測度の変化に関する考察

学籍番号：90196042　乾口研究室　片岡 利延

1. はじめに

新しい情報に基づく知識の更新はベイズの確率モデルを用いて表現されることが多い．しかし，ベイズの確率モデルでは，部分的無知をうまく表現していない．部分的無知が表現できるモデルとして，Dempster と Shafer の証拠理論がある [1]．確率論の拡張である証拠理論では，不明確さの三つの局面を表す，不一致，混迷，不特定に関する情報測度が提案されている [2].

本研究では，人間の情報収集活動のモデル化の基礎として，証拠理論における知識更新モデルを考察するとともに，不特定や不一致などの情報測度の変化について検討する．

2. 証拠理論における種々の情報測度と結合規則

Dempster と Shafer の証拠理論では，通常の確率に適さない主観にかかわる不確実性を扱うため，全体集合の各要素にではなく，部分集合に確率を割り当てている．各部分集合に割り当てる確率を定める関数 $m : \mathcal{P}(X) \to [0,1]$ は，基本割り当てと呼ばれ，(i) $0 \le m(A) \le 1, A \subseteq X$, (ii) $m(\emptyset) = 0$, (iii) $\sum_{A\subseteq X} m(A) = 1$ を満足する．ただし，$\mathcal{P}(X)$ は X のべき集合であり，$\emptyset$ は空集合を表す．$m(A)$ は X の部分集合 A に割り当てられた確率を示し，A 内の各点を自由に動ける半可動確率質量と考えられている．$m(A) > 0$ なる X の部分集合 A を焦点要素と呼び，その集合を $\mathcal{F}$ と記す．なお，$X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ と仮定する．belief 測度 (Bel), plausibility 測度 (Pl) は，$\mathrm{Bel}(A) = \sum_{B\subseteq A} m(B)$, $\mathrm{Pl}(A) = \sum_{B\cap A\neq\emptyset} m(B)$ と定められる．

Dempster と Shafer の証拠理論では，不明確さを示す測度として，種々の情報測度が提案されている．このうち，不一致の測度と不特定の測度は $E(m) = -\sum_{A\subseteq X} m(A)\log_2 \mathrm{Pl}(A)$, $V(m) = \sum_{A\subseteq X} m(A)\log_2 |A|$ と定められる [2]．ただし，$|A|$ は集合 A の濃度を示している．

複数の基本割当を統合する種々の方法が提案されている [3]．これらは，結合規則と呼ばれる．いま，二つの基本割当 m_1, m_2 が与えられたとき，これらを統合した基本割当 m_{12} を求めることを考える．m_1 の焦点要素の集合を $\mathcal{F}_1$, m_2 の焦点要素の集合を $\mathcal{F}_2$ とする．このとき，$C_{12} = \{(A,B) \mid A\cap B = \emptyset,\ A\in\mathcal{F}_1,\ B\in\mathcal{F}_2\}$ と定め，$C \in \mathcal{P}(X)$ に対して，$k(C) = \sum_{A\cap B=C} m_1(A)m_2(B)$ と定める．

種々の結合規則が提案されているが，その多くは確率質量 $k(\emptyset)$ の処理の仕方が異なる．Dempster は $k(\emptyset)$ を $C \neq \emptyset$ に $k(C)$ の比率に応じて配分するモデル $m_{12}^{\mathrm{Dem}}(C) = k(C)/(1 - K(\emptyset))$, を提案している．一方，Yager は $k(\emptyset)$ を全体集合に配分するモデルを，Dubois は k において空集合に割当てることになる $(A,B) \in C$ の確率質量 $m_1(A)m_2(B)$ を $A \cup B$ に割当てるモデルを提案している．より一般に，$C \neq \emptyset$ に対して $k(\emptyset)$ の配分割合 $w_m(C)$ を定め，$m_{12}^{\mathrm{WO}}(C) = k(C) + w_m(C)k(\emptyset)$ とする加重モデルが提案されている．

3. 結合規則と情報測度の変化

人間の知識や信念が基本割当で表現され，新着情報によるその更新が種々の結合規則によってなされる場合，結合結果および不一致や不特定の測度がどのように変化するかを考察する．次の定理が得られる．

定理 1 $\bigcap(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) \neq \emptyset$ であれば，そのときに限り，$k(\emptyset) = 0$ となる．このとき，いずれの結合規則でも $V(m_1) \ge V(m_{12})$, $V(m_2) \ge V(m_{12})$, $E(m_{12}) = E(m_1) = E(m_2) = 0$ となる．

定理 2 $\bigcap\mathcal{F}_1 \neq \emptyset$ とする．このとき，$\exists\{B_i,\ i = 1,2,\ldots,l\} \subseteq \mathcal{F}_2$ $\exists\{A_i,\ i = 1,2,\ldots,l\} \subseteq \mathcal{F}_1$, $B_i \cap A_i \neq \emptyset$, $i = 1,2,\ldots,l$ $\bigcap_{i=1}^{l} B_i \cap \bigcap\mathcal{F}_1 = \emptyset$ であれば，かつそのときに限り，いずれの結合規則でも $E(m_{12}) > E(m_1)$ が成立する．

情報は簡潔であることが多いので，焦点要素の集合が $\mathcal{F}_2 = \{B, X\}$ $(B \subset X)$ となり，$m_2(B) = b$, $m_2(X) = 1 - b$ と与えられる場合を考える．最初の知識が基本割当 m_1 で与えられるとすると，次の定理が得られる．

定理 3 $m_2(B) = b$, $m_2(X) = 1-b$ なる情報と無限回結合するとき，Dempster の結合規則では，$\exists A$, $m_1(A) > 0$, $A\cap B \neq \emptyset$ であれば，$\mathrm{bel}(B) = 1$ に収束する．Yager の結合規則では，$\mathrm{bel}(B) = 1 - \sum_{A\cap B=\emptyset} m_1(A)$ に収束する．Dubois の結合規則では，$\mathrm{bel}(B) = 1$ に収束する．

定理 3 より，同じ情報を何度も観測すれば，Dempster や Dubois の結合規則では，やがて X でない焦点要素が正しいと判断してしまうことを表している．

定理 4 $\sum_{A\not\subseteq B} m_1(A) \le k(\emptyset)$ であるとき，加重モデルにおいて，$w_m(\emptyset) = 0, \forall C \not\subseteq B, w_m(C) \ge m_1(C)/k(\emptyset)$ が成立すれば，$V(m_{12}^{\mathrm{WO}}) \ge V(m_1)$ となる．

4. belief 測度を保存する新しい結合規則

知識や情報は，基本割当で表現できるほど正確とは限らず，「事象 B_i が生起する確率は少なくとも b_i 以上である」というような部分的な情報であると考えられる．この情報は，belief 測度を用いて，$\mathrm{Bel}(B_i) \ge b_i$ と表すことができる．

これより，l 個の情報が与えられたとき，条件 $\mathrm{Bel}(B_i) \ge b_i$, $i = 1,2,\ldots,l$ を満たす基本割当を求めることになるが，これを満たすものが存在する保証はない．存在する場合，最少特定の原則に従い，不特定度が最大の基本割当が選ばれる．存在しない場合は，定式化によっては組合せ問題となる．

そこで，初期知識を基本割当 m_0 で表現し，情報が得られる度にこれを更新する方法で，できるだけ，条件 $\mathrm{Bel}(B_i) \ge b_i$, $i = 1,2,\ldots,l$ を満たす基本割当を求める方法を提案する．$\mathrm{Bel}(B_i) \ge b_i$ を満たす最少特定の基本割当 m_i は，$m_i(B_i) = b_i$, $m_i(X) = 1 - b_i$ となる．このことから，m_0 と m_i の結合規則を考えればよいことになる．

m_0 の焦点要素の集合を $\mathcal{F}_0$ とし，$C_0 = \{A \in \mathcal{F}_0 \mid A\cap B_i \neq \emptyset\}$, $com = \sum_{A\in C_0} m_0(A)$ と定める．$C_0 = \emptyset$ のとき，m_0 に基づく belief を保存し，かつ $\mathrm{Bel}(B_i) \ge b_i$ を満たす基本割当は存在しない．条件 $\mathrm{Bel}(B_i) \ge b_i$ の場合を考える．T_{cond} を $cond$ の真理値とし，次の結合法則を提案する．

$$
m(C) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{A\cap B_i=C \\ A\not\subseteq B_i}} \frac{b_i m_0(A)}{com} + m_0(C) - T_{C\cap B_i\neq\emptyset, C\not\subseteq B_i}\left(1 - \frac{b_i}{com}\right)m_0(C) \\ \quad b_i \le com \text{ のとき} \\ \displaystyle\sum_{A\cap B_i=C} m_0(A) + T_{C=B_i}(b_i - com) + T_{C\cap B_i=\emptyset}\frac{(1-b_i)m_0(A)}{1-com} \\ \quad \text{その他} \end{cases}
$$

を定めれば，C_0, B_i の belief 測度の条件が満たされる．特に，$b_i \le com$ であれば，belief 測度はすべて保存される．

参考文献

1. 石塚 満, 電子通信学会誌 **66** 900–903 (1983).
2. G. J. Klir, Fuzzy Sets and Systems **24** 141–160 (1987).
3. F. Smarandache, http://xxx.lanl.gov/ftp/cs/papers/0410/0410033.pdf