環状ネットワークにおけるロードプライシング

学籍番号：90171161　乾口研究室　山本 勝樹

1. 序論

ロードプライシング（道路課金）は, 利用の集中する道路に対し課金を行うことで, 交通混雑の緩和や環境への負荷軽減を図るという手法であり, 国内では首都高速や阪神高速で導入されている.

本研究では, 環状道路に対し設定された, 目標とする交通量が達成されるような課金を決定する問題を扱う.

Dial [1,2] は, 類似の課金問題の双対問題を一種の多品種フロー問題として解く手法を提案しているが, 計算量の上界は示されていなかった. 本研究では, 環状道路上の課金問題に対し, 双対問題を帰着させた多品種フロー問題を, Shepherd–Zhang [3] の結果を応用して, 強多項式時間で解く組合せアルゴリズムを提案する.

2. 課金問題のモデル化

本研究で扱う課金問題の数理モデルは, 環状の有向グラフ $G=(V,A)$ で定義される. A 中の反対向きの 2 枝の対を無向辺とみなした集合を E とする. 無向辺 e を右, 左回りにたどる有向枝を, それぞれ $\overrightarrow{e}, \overleftarrow{e}$ と書く. また, $\overrightarrow{ij}, \overleftarrow{ij}$ を, 2 点 i,j を右, 左回りに結ぶパスとする. 目標となる各点間の交通が, 全パスの集合 $\mathcal{P}$ 上のフロー x° として与えられる. 無向辺 e に設定される課金 $c(e)$ は, 端点間の所要時間 $t(\overrightarrow{e}), t(\overleftarrow{e})$ を線形に増加する効果をもつ. 各旅行者が課金により修正された所要時間において, 目的地まで最短路を通って目標フローが達成されるような課金の中で, 課金による収入が最小になるものを求める. この問題を LP にすると,

[MRP (Minimum Revenue Primal)]

$$\min \sum_{e\in E}\Big(\sum_{\overrightarrow{e}\in P} x^\circ(P) + \sum_{\overleftarrow{e}\in P} x^\circ(P)\Big)c(e)$$

sub. to

$$w^{ij} + \alpha \sum_{\overrightarrow{e}\in \overrightarrow{ij}} c(e) \begin{cases} \geq -t(\overrightarrow{ij}) & \text{if } x^\circ(\overrightarrow{ij}) = 0 \\ = -t(\overrightarrow{ij}) & \text{if } x^\circ(\overrightarrow{ij}) > 0 \end{cases} \quad (\overrightarrow{ij} \in \mathcal{P})$$

$$w^{ij} + \alpha \sum_{\overleftarrow{e}\in \overleftarrow{ij}} c(e) \begin{cases} \geq -t(\overleftarrow{ij}) & \text{if } x^\circ(\overleftarrow{ij}) = 0 \\ = -t(\overleftarrow{ij}) & \text{if } x^\circ(\overleftarrow{ij}) > 0 \end{cases} \quad (\overleftarrow{ij} \in \mathcal{P})$$

$$c(e) \geq 0 \qquad (e \in E)$$

$$w^{ij} : \text{free} \qquad (\overrightarrow{ij} \in \mathcal{P})$$

と定式化できる. (α は課金と時間を対応させる係数)

3. 多品種フロー問題への帰着

MRP は, 枝長 t が, i,j,k,l の順に右回りに配置された任意の 4 点 $(i \neq j, k \neq l)$ に対し, (1) の関係を満たしていれば (特に, $t(\overrightarrow{e}) = t(\overleftarrow{e})$ $(e \in E)$ ならば, (1) が必ず満たされる), 最適解を持つことが示される.

$$\begin{aligned} &\max(t(\overrightarrow{ij}), t(\overleftarrow{ji})) + \max(t(\overrightarrow{kl}), t(\overleftarrow{lk})) \\ \leq\ &\min(t(\overrightarrow{ji}), t(\overleftarrow{ij})) + \min(t(\overrightarrow{lk}), t(\overleftarrow{kl})) \end{aligned} \qquad (1)$$

このとき, MRP は多品種フロー問題 UMMFN に帰着できる. ただし, 環状の無向グラフ $\tilde{G} = (V,E)$ のパス集合を, $\tilde{\mathcal{P}}$ とし, 上限容量 $u \in \mathbf{R}^E_{++}$, 下限容量 $l \in \{0, -\infty\}^{\tilde{\mathcal{P}}}$, およびコスト $w \in \mathbf{R}^{\tilde{\mathcal{P}}}$ が, MRP をもとに設定される. コストは, “i,j,k,l の順に右回りに配置された任意の 4 点 $(i \neq j, k \neq l)$ に対し, $w(ij)+w(kl) \leq w(ji)+w(lk)$ となる” という正則性と呼ばれる条件を満たす. (ij は i,j を右回りに結ぶ無向パスとする.)

[UMMFN]

$$\min \ \sum_{P\in\tilde{\mathcal{P}}} w(P)x(P)$$

sub. to

$$x(P) + x(E \setminus P) = 0 \quad (P \in \tilde{\mathcal{P}})$$

$$\sum_{P\in\tilde{\mathcal{P}}, e\in P} x(P) \leq u(e) \quad (e \in E)$$

$$x(P) \geq l(P) \quad (P \in \tilde{\mathcal{P}})$$

4. 最小課金アルゴリズム

UMMFN のコスト関数が, 正則性を満たす場合に最適解を求めるアルゴリズム MMFMRP を提案する.

ただし, 対立対とは, $P \cap P' \neq \emptyset, P \cup P' = E$ なるパス対であり, フロー x に対し, $\tilde{\mathcal{P}}(x) := \{P \mid x(P) > l(P)\}$ と定め, $\tilde{\mathcal{M}}(x)$ は $\tilde{\mathcal{P}}(x)$ の極大パスの集合とする. 実行可能フロー x とパス対 P, P' に対し, $\mathrm{Reverse}(x,P,P')$ は, $P \neq E \setminus P'$ の場合, 可能な限り $x(P), x(P')$ を減少させ, $x(\bar{P}), x(\bar{P'})$ を増加させる操作とし, $P = E \setminus P'$ の場合は, 可能な限り $x(P)$ を減少させ, $x(P')$ を増加させる操作とする. 負対とは, $\mathrm{Reverse}(x,P,P')$ により目的関数値が減少するパス対 P, P' とする.

Algorithm MMFMRP

初期解 $x := 0$ とおく.
While(対立対 $P_1, P_2 \in \tilde{\mathcal{M}}(x)$ が存在)
　　$x := \mathrm{Reverse}(x, P_1, P_2)$
　　$\tilde{\mathcal{P}}(x)$ と $\tilde{\mathcal{M}}(x)$ を更新
While(負対 $P_1, P_2 \in \tilde{\mathcal{M}}(x)$ が存在)
　　$x := \mathrm{Reverse}(x, P_1, P_2)$
　　$\tilde{\mathcal{P}}(x)$ と $\tilde{\mathcal{M}}(x)$ を更新
x を出力する.

アルゴリズムの出力 x が UMMFN の最適解になっており, x をもとに MRP の解を求められる.

定理 1 アルゴリズム MMFMRP により, 正則なコスト関数を持つ UMMFN とそれを導く MRP を強多項式時間で解く.

参考文献

[1] R. B. Dial: Minimal-revenue congestion pricing part I: A fast algorithm for the single-origin case, Transportation Research Part B 33 (1999) 189–202.
[2] R. B. Dial: Minimal-revenue congestion pricing Part II: An efficient algorithm for the general case, Transportation Research Part B, 34 (2000) 645–665.
[3] B. Shephard and L. Zhang: A cycle augmentation algorithm for minimum cost multicommodity flows on a ring, Discrete Appl. Math. 110 (2001) 301–315.