フロベニウスの定理に基づいた AHP の一対比較行列の感度分析

学籍番号：90181133　飯國研究室　松本圭司

1. はじめに

AHP (Analytic Hierarchy Process) は、直感による質的情報から定量的な情報を導き出すことのできる意思決定支援手法である。AHP では、一対比較行列を作成し、固有ベクトル法により重要度を算出する。一対比較行列に整合性があるかどうかを調べるために、次に示す CI (Consistency Index) 値が用いられる。

$$\mathrm{CI} = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1} \tag{1}$$

ここで、$\lambda_{\max}$ は与えられた一対比較行列の最大固有値、n は比較要素数であり、この値が 0.1 または 0.15 以下であれば、一対比較は整合しているとみなされる。AHP を実際に適用する場合、一対比較のやり直しが何回か行われる。本研究では、そのような時に固有値、固有ベクトルを計算することなく、整合性を保つ区間の推定や、一対比較値の改善を行う方法について考える。

2. 準備

一対比較行列 $A = (a_{ij})$ の第 i 行を行ベクトル a_i で表すものとする。フロベニウスの定理、および (1) 式より、設定した CI 値（$\overline{\mathrm{CI}}$と表す）に対して、適当な正のベクトル $w > 0$ が存在し、

$$\max\left\{\frac{a_1 w}{w_1}, \cdots, \frac{a_n w}{w_n}\right\} \le n + \overline{\mathrm{CI}} \times (n-1) \tag{2}$$

を満たすならば、CI 値は $\overline{\mathrm{CI}}$以下であることが保証される。

3. 整合度を保つ区間の推定

通常、一対比較行列は逆数行列 $(a_{ji} = 1/a_{ij})$ となる。A の (i,j) 要素 a_{ij}を$\delta(\delta > 0)$ 倍すると、a_{ji}は $1/\delta$倍となる。このとき、(i,j) および (j,i) 以外の要素をすべて固定し、(2) 式を満たす δ の区間を求めれば、整合性を保つ一対比較値 a_{ij} の区間推定ができる。そのためには、適当な $w > 0$ を見つけなければならないが、w は主固有ベクトルにできるだけ近いものが良い、ということが知られている。そこで、w として A の (i,j) 要素をδa_{ij}とした行列の幾何平均を用いることとする。このとき、(2) 式の左辺の max の中の第 k 要素を $f_k(\delta_{ij})$ と記すと、

$$\max_{1 \le k \le n} f_k(\delta_{ij}) \le n + \overline{\mathrm{CI}} \times (n-1)$$

を満たす δ_{ij}の区間を求めれば$\overline{\mathrm{CI}}$ 以下であるような a_{ij} の区間を推定できる。各 f_k は単峰関数であるので、そのような区間は二分法などにより簡単に求められる。

4. 整合度の改善

一対比較行列 A の (i,j) 要素 a_{ij}をδa_{ij} で置き換えたときの最大固有値を $\lambda_{\max}(\delta_{ij})$ と表す。(2) 式より

$$\lambda_{\max}(\delta_{ij}) \le f(\delta_{ij}) = \max_k f_k(\delta_{ij})$$

が得られる。この式は、$f(\delta_{ij})$ は$\lambda_{\max}(\delta_{ij})$ の上界値であることを意味する。しかしながら、上界値を下げることで $\lambda_{\max}(\delta_{ij})$ を小さくすることは期待できる。とくに、ある i, j において $f(\delta_{ij})$ を最小化したとき、現在の最大固有値よりも小さい値を得ることができれば、(1) 式より CI 値も改善できることがわかる。なお、f_kの単峰性により、f もまた単峰関数となるため、この関数の最小化は黄金分割法などにより容易に行える。

5. 数値例

$\overline{\mathrm{CI}} = 0.1$ とする。以下の一対比較行列において区間の推定を行った。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

この結果、各 a_{ij} について、以下の区間を得た。

$$a_{12} = [0.317,\ 3.158], a_{13} = [0.919, 4.355]$$
$$a_{14} = [1.267, 12.633], a_{23} = [0.317, 3.158]$$
$$a_{24} = [0.919,\ 4.355], a_{34} = [0.317, 3.158]$$

次に、上の行列の $(2,3)$ 要素を 2 から 5 に変えた行列を考える。この行列の CI 値は $\mathrm{CI} = 0.134$ である。この行列に対し、提案手法を用いて整合度の改善を行ったところ、$f(\delta_{ij})$ は $(i,j) = (2,3)$ のときに最も小さくすることができた。また、そのときの値は $a_{23} = 1$ であり、$\mathrm{CI} = 0.02$ と、整合度が大きく改善された。

6. おわりに

本研究では、フロベニウスの定理を利用して一対比較行列の整合度を保つ区間の推定を行う手法と、整合度の改善を行う手法を提案した。前者については、設定した CI 値を超えることのない範囲を求めることが可能であることがわかった。後者については、想定したエラーを発見し、その修正を行うことができた。