密度関数を用いたロバスト安定化

藤井研究室　90121093　永田陽平

1 はじめに

非線形システムの安定解析及び安定化には，リアプノフの安定性理論を利用することが多いが，他にも，小ゲイン定理など，リアプノフの安定性理論とは異なる安定条件を持つ安定化手法がある．

Rantzer が提案した手法は，密度関数を用いてシステムを大域的に安定化する制御則を求める手法 [1] である．本研究では，この手法を，不確かさを持つ非線形システムのロバスト安定化に拡張することを試みる．また，本手法による安定判別の性能を比較するため，同じ条件下で小ゲイン定理と比較し，本手法の有用性を検証する．

2 問題設定

2.1 大域的漸近安定化 [1]

＜定理 1＞

$\dot{x}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))$ のシステムに対して*

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\rho(\boldsymbol{x})/\|\,\boldsymbol{x}\,\|$ が可積分　$(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \|\,\boldsymbol{x}\,\| \geq 1)$

$\nabla \cdot (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\rho(\boldsymbol{x})) > 0$　(測度 0 以外の $\boldsymbol{x} \neq 0$)

を満たす $\rho(\boldsymbol{x}) \geq 0$ が存在する† ならば，$\boldsymbol{x}(t)$ は‡，$t \to \infty$ のとき 0 に収束する．

この安定性は，局所的ではなく，測度 0 の集合を除いた大域的な安定性である．

また，フィードバック (FB) 系のシステム $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x})$ について，リアプノフの安定性理論では，安定条件に係わる関数と制御則を同時に探索するのは困難であるが，この安定化手法ならば，同時に探索しやすい．

2.2 ポリトープ型不確かさ

ポリトープ型の不確かさを以下のように定義する．

＜定義 1＞

システムの物理パラメータの不確かさの集合を，端点 $\boldsymbol{\delta}_i \in \mathbb{R}^r$ で定まる凸集合の要素として表現したものをポリトープ型不確かさという．

$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}_\delta(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}_\delta(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x})$ に対しては，

$\boldsymbol{f}_\delta(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}) \ \ldots \ \boldsymbol{f}_r(\boldsymbol{x})]\boldsymbol{\delta}$

$\boldsymbol{g}_\delta(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x}) \ \ldots \ \boldsymbol{g}_r(\boldsymbol{x})]\boldsymbol{\delta}$

$\boldsymbol{\delta} \in \mathrm{Co}\{\boldsymbol{\delta}_1, \ldots, \boldsymbol{\delta}_k\} \in \mathbb{R}^r$

で表される．

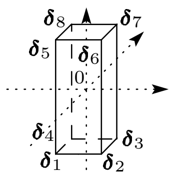

図 1: パラメータの変動領域

2.3 SOS (Sum Of Squares) [1]

＜定義 2＞

多変数多項式 $p(x_1, \ldots, x_n) \equiv p(\boldsymbol{x})$ が，

多項式 $f_1(\boldsymbol{x}), \ldots, f_m(\boldsymbol{x})$，準正定行列 Q を用いて

$p(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} {f_i}^2(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{z}(\boldsymbol{x})^T Q \boldsymbol{z}(\boldsymbol{x})$

と表されるとき，$p(\boldsymbol{x})$ は SOS である．

SOS の多項式 $p(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{z}^T Q \boldsymbol{z}(\boldsymbol{x})$ は，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して準正定である．正定性を示すには $Q > 0$ を示せばよい．

3 結果

制御対象となるシステムとして $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}_\delta(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}_\delta(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x})$ を考える．ただし，$\boldsymbol{f}_\delta(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{g}_\delta(\boldsymbol{x})$ を多項式，$\boldsymbol{\delta} \in \mathrm{Co}\{\boldsymbol{\delta}_1, \ldots, \boldsymbol{\delta}_k\}$ を $\boldsymbol{f}_\delta(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{g}_\delta(\boldsymbol{x})$ の係数に関して線形とする．これを，密度関数を用いて安定化する方法を以下に示す．

＜解法 1＞

ポリトープ型不確かさ $\boldsymbol{\delta} \in \mathrm{Co}\{\boldsymbol{\delta}_1, \ldots, \boldsymbol{\delta}_k\}$ を持つ FB 系の非線形システム $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}_\delta(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}_\delta(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x})$ について，

$$\rho(\boldsymbol{x}) = \frac{a(\boldsymbol{x})}{b(\boldsymbol{x})^\alpha}, u(\boldsymbol{x})\rho(\boldsymbol{x}) = \frac{c(\boldsymbol{x})}{b(\boldsymbol{x})^\alpha} \ (b(\boldsymbol{x}) : \text{正定})$$

とおく§．このとき，$b(\boldsymbol{x}) > 0$ より，

$$d_l(\boldsymbol{\delta}_l, \boldsymbol{x}) \equiv [b\nabla \cdot \{\boldsymbol{f}_\delta a + \boldsymbol{g}_\delta c\} - \alpha \nabla b\{a\boldsymbol{f}_\delta + \boldsymbol{g}_\delta c\}]$$
$$= \boldsymbol{z}^T Q_l(\boldsymbol{\delta}_l, a_i, c_i)\boldsymbol{z} > 0$$
$$\therefore Q_l(\boldsymbol{\delta}_l, a_i, c_i) > 0 \quad (l = 1, \ldots, k)$$

を満たす $a(\boldsymbol{x}), c(\boldsymbol{x})$ の係数 a_i, c_i を求めればよい．

変動パラメータがノルム有界型の不確かさを持つ場合も，SOS をロバスト SDP で解くことにより安定化可能である．

3.1 数値例

$\dot{x} = (1 + \delta_1)y - x^3 + (1 + \delta_2)x^2 + u$

$\dot{y} = (1 + \delta_3)x + 4u$

$(\delta_1 \in [-0.2 \ \ 0.2], \quad \delta_2 \in [-0.1 \ \ 0.1], \quad \delta_3 \in [-0.5 \ \ 0.5])$

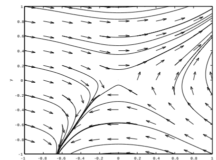

図 2: state flow without control ($\delta_1 = 0.2, \delta_2 = -0.1, \delta_3 = 0.5$)

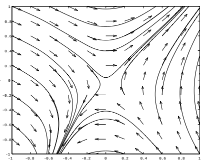

図 3: state flow without control ($\delta_1 = 0.2, \delta_2 = -0.1, \delta_3 = -0.5$)

左右で δ の値，上下で制御の有無が異なる．δ の値が異なりベクトル場が異なっても安定化可能である．

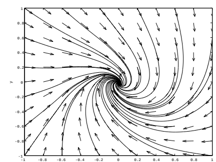

図 4: state flow with control ($\delta_1 = 0.2, \delta_2 = -0.1, \delta_3 = 0.5$)

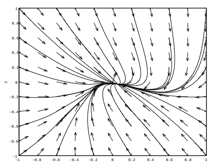

図 5: state flow with control ($\delta_1 = 0.2, \delta_2 = -0.1, \delta_3 = -0.5$)

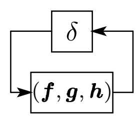

図 6: 比較のための FB ループ

3.2 安定性解析能力の比較

本来なら異なった条件下で用いられる小ゲイン定理と本手法を，以下のような同じ条件下にて比較した．L_2 ゲインが 1 以下のシステム $(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h})$ で図.6 のような FB 系 ($\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\delta\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$) に本手法を用いたところ，ほとんど安定化できなかった．しかし，安定化できた場合，小ゲイン定理では保障されない $|\delta| > 1$ についても安定条件は成立した．

4 おわりに

本研究では，密度関数をポリトープ型不確かさを持つ FB 系の非線形システムのロバスト安定化に応用した．安定性解析能力について，小ゲイン定理と比べると，安定性の条件は厳しいようである．ただし，本手法では不確かさの絶対値が 1 以上でも解ける場合がある．

参考文献

[1] A.Rantzer and P.A.Parrilo, "ON CONVEXITY IN STABILIZATION OF NONLINEAR SYSTEMS", *IEEE Conf. Decision Contr.*, 1980 (2000).

---

*ただし，$\left(\boldsymbol{f} \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n),\ \boldsymbol{f}(0) = 0\right)$

†ただし，$\left(\rho \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}, \mathbb{R})\right)$

‡測度 0 以外の初期状態の集合 $\boldsymbol{x}(0)$ に対する軌跡

§ただし，可積分条件 (**定理 1**) を満たす α を選ぶ