RBF ネットワークを用いた 2 画像同時補間

学籍番号：90132001　飯國研究室　間畠 智紀

1. はじめに

医療画像やカメラなどで高解像度画像が必要とされている．しかし，求められているほどの高解像度画像を直接測定することができない．そのため，複数の低解像度画像から高解像度画像を得る方法として，補間が用いられている．補間とは，図 1 で示すように，離散的なデータから連続関数を求めることである．その中でも，RBF(Radial Basis Function) ネットワークを用いた補間では，なめらかな高解像度画像が得られる．しかし，複数の低解像度画像を用いる場合，RBF ネットワークを構成する RBF 係数を求める計算量が多いという問題がある．

よって本研究では 2 枚の低解像度画像を用いた場合の RBF 係数の高速計算法を提案する．2 枚の画像は，平行移動の関係にあるものとする．この時，RBF 係数を求める行列方程式がクロネッカー積と離散フーリエ変換を用いた対角化によって簡略化できる．この結果，行列方程式を解く計算量が $O(N^6)$ から $O(N^3)$ に低減できる．

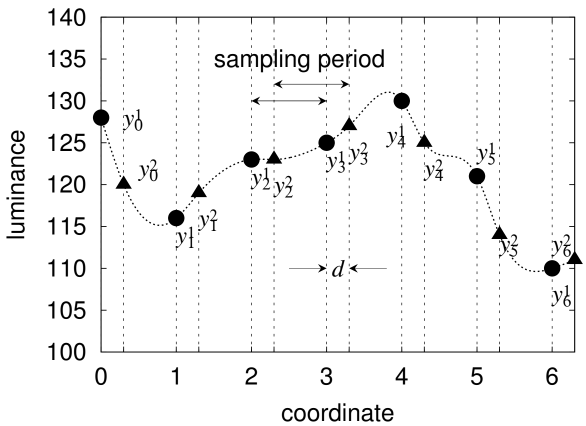

図 1: 補間の概要

2. RBF 係数の直接計算

2 枚の低解像度画像として，$\boldsymbol{y}_1=(y_1^1, y_2^1, \cdots, y_n^1)^T$，$\boldsymbol{y}_2=(y_1^2, y_2^2, \cdots, y_n^2)^T$ を用いる．本研究では補間関数として座標 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2)$ を入力とする次のような RBF ネットワークを用いる．

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{l=1}^{N^2} c_l^1 \Phi(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_l) + \sum_{l=1}^{N^2} c_l^2 \Phi(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_l + \boldsymbol{d}) \quad (1)$$

c_l^1, c_l^2 は RBF 係数である．$\boldsymbol{x}_l$ はサンプリング位置を示す位置ベクトルのことである．$\boldsymbol{d}$ は 2 枚の低解像度画像のずれを表したものである．また

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \varphi(x_1)\varphi(x_2)$$
$$\varphi(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-(x-Nm)^2/2\sigma^2}$$

である．式 (1) の右辺の第 1 項，第 2 項はそれぞれ $\boldsymbol{y}_1$，$\boldsymbol{y}_2$ を補間する項である．RBF 係数を求めるために，2 枚の低解像度画像の画素の位置と輝度を補間関数に代入し，行列で表現すると，

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{G}_1 & \boldsymbol{G}_2 \\ \boldsymbol{G}_2^T & \boldsymbol{G}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{c}_2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

と表される．式 (2) を解く計算量は $O(N^6)$ となってしまう．

3. 分解を用いた高速計算法

式 (2) の行列 $\boldsymbol{G}_1$，$\boldsymbol{G}_2$ をクロネッカー積で表現する．

$$\boldsymbol{G}_1 = \boldsymbol{G}_{s1} \otimes \boldsymbol{G}_{s1} \qquad \boldsymbol{G}_2 = \boldsymbol{G}_{s2} \otimes \boldsymbol{G}_{s3}$$

そして，クロネッカー積の性質を使って式 (2) を分解すると，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G}_{s1}\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{G}_{s1}^T + \boldsymbol{G}_{s3}\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{G}_{s2}^T &= \boldsymbol{Y}_1 \\ \boldsymbol{G}_{s3}^T\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{G}_{s2} + \boldsymbol{G}_{s1}\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{G}_{s1}^T &= \boldsymbol{Y}_2 \end{aligned} \quad (3)$$

である．ここで $\boldsymbol{c}_i=cs(\boldsymbol{C}_i)$，$\boldsymbol{y}_i=cs(\boldsymbol{Y}_i)$　$(i = 1, 2)$ とする．次に離散フーリエ変換を用いることにより，$\boldsymbol{G}_{s1}$，$\boldsymbol{G}_{s2}$，$\boldsymbol{G}_{s3}$ をフーリエ変換行列 $\boldsymbol{W}$ を用いて対角化すると．

$$\boldsymbol{G}_{si} = \boldsymbol{W}^*\boldsymbol{D}_{si}\boldsymbol{W} \quad (i = 1, 2, 3)$$

である．これを用いると連立方程式 (3) が

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D}_{s1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{W}^*\overline{\boldsymbol{D}}_{s1} + \boldsymbol{D}_{s3}\boldsymbol{W}\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{W}^*\overline{\boldsymbol{D}}_{s2} &= \boldsymbol{W}\boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{W}^* \\ \overline{\boldsymbol{D}}_{s3}\boldsymbol{W}\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{W}^*\boldsymbol{D}_{s2} + \boldsymbol{D}_{s1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{W}^*\overline{\boldsymbol{D}}_{s1} &= \boldsymbol{W}\boldsymbol{Y}_2\boldsymbol{W}^* \end{aligned}$$

と簡略化される．その結果，計算量が $O(N^3)$ に低減できる．

4. まとめ

本研究ではクロネッカー積と離散フーリエ変換を用いた対角化により，RBF 係数の計算量を $O(N^6)$ から $O(N^3)$ に低減した．