木構造の半順序制約をもつ分離凸関数最小化問題の解法

学籍番号：90447014　藤重研究室　北瀬 智之

1. はじめに

最近，Ahuja-Orlin は線形順序制約をもつ分離凸関数最小化問題を考察している．この問題は，線形な順序制約条件 $l \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq u$ の下で厳密に凸な関数 $C_j(x_j)$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ の和を最小化する問題である．本研究では，Ahuja-Orlin が考察した線形順序制約をもつ分離凸関数最小化問題の制約条件をより一般的にして木構造の半順序制約を考え，分離凸関数を最小化する問題に対する効率的解法を提案した．これの一般化により、応用の場が広がると期待できる．

2. 木構造の半順序制約をもつ分離凸関数最小化問題

木構造の半順序制約をもつ分離凸関数最小化問題は，次の式で表される．有向木 $T = (V, A)$ によって半順序構造が表現されているとする．

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} C_j(x_j) \\ \text{subject to} & x_i \leq x_j \ \ ((i,j) \in A). \end{array} \tag{1}$$

任意な $x_j (j = 1, 2, \cdots, n)$ に対して根から順序制約を満たす枝を通って到達可能な点の全体を W とする．$\lambda_{ij}((i,j) \in E)$ を Karush-Kuhn-Tucker 条件における各制約条件に対する枝 (i,j) の重みを表すラグランジュ乗数とする．(λ_{ij} は枝 (i,j) 中のフローと考えることができる．) 点 i から，λ が正で到達可能な点の集合を U とする．ここで，U 内の x は全て同じ値 x_i である．また，W に接続する順序制約を満たさない枝の両端を i, j とし，その枝のフロー値を λ_{ij} とする．

3. Karush-Kuhn-Tucker 条件

本研究で提案する解法は Karush-Kuhn-Tucker 条件を最適性条件としている．問題 (1) に対する Karush-Kuhn-Tucker 条件は次式となる．

$$\nabla(\sum_{j=1}^{n} C_j(x_j)) + \sum_{(i,j)\in A} \lambda_{ij} \nabla(x_i - x_j) = \mathbf{0} \tag{2}$$

$$x_i \leq x_j \quad , \quad \lambda_{ij} \geq 0 \ ((i,j)) \in A) \tag{3}$$

$$\forall (i,j) \in A \ : \ \lambda_{ij} > 0 \Longrightarrow x_i = x_j. \tag{4}$$

(2) より

$$C'_j(x_j) = \sum_{(k,j)\in A} \lambda_{kj} - \sum_{(j,k)\in A} \lambda_{jk} \quad (j \in U). \tag{5}$$

この式で，U 内において，$x_i = x_j = \theta$ として λ の連立方程式を求めると

$$\sum_{(k,j)\in A} \lambda_{kj} - \sum_{(j,k)\in A} \lambda_{jk} = C'_j(\theta) \quad (j \in U). \tag{6}$$

4. 木構造の半順序集合上の分離凸関数最小化問題の解法

このアルゴリズムは，W に接続し順序制約を満たさない枝 (i_0, j_0) を選択することにより始まる．次に，(5) 式の連立方程式に U 内の x の値および x_{j_0} が同じ値となる条件，さらに $\lambda_{ij} = 0$ となる枝 (i,j) の条件を加える．U 内の x の値および x_{j_0}，U 内の λ および λ_{i_0,j_0} の値を変数としてこれらの連立方程式を計算する．この計算にともない，U 内の枝 (k,l) に対して λ_{kl} が負になった場合には λ_{kl} が 0 となるように指定して再び計算しなおし，U を更新する (U は減少する)．さらに，U が T の根を含まないとき，U に入る枝 (i_1, j_1) に対応する変数 x_{i_1}, x_{j_1} の値が θ を越えた場合，U は i_1 を取り込んでさらに i_1 から λ の値が正である枝を通って到達可能な点も取り込んで拡大する．さらに引き続いて θ を引き下げるとき λ_{i_1,j_1} は増加して正の値となる．上記のことがおこらず，W から出る枝 (i_0, j_0) に対して $x_{i_0} = x_{j_0}$ となった場合は，点 j_0 から λ の値が正である枝を通って到達可能な点のすべてを W に付け加える．このようにして W を大きくしていくことにより，順序制約を満たさない枝が無くなれば終了する．

5. まとめ

木構造の半順序集合上の分離凸関数最小化問題のアルゴリズムにおける計算量について考察する．ここで，このアルゴリズムがどれだけの操作を繰り返すかにのみ考察する．この操作で，U は j_0 を含む成分を取り込んで大きくなるか, 新たに U を分離して小さくなるかのどちらかである．大きくなる場合は高々n 個の点を含んで終わる．小さくなる場合は高々n 個の U に分離されて終わる．結局この操作において $2n$ 回操作をすれば W がひとつの点を取り込んで終わり，$O(n)$ となる．すべての点 (高々n 個) が W に取り込まれると最適解が得られるので全体として $O(n^2)$ 回の操作でアルゴリズムは終了する．