

知能システム学 I

次の3問すべてを解答せよ。問題毎に別の答案用紙を用いること。答案用紙の追加は認めない。

1

実変数 x, y, t に対して xy 平面上の曲線 C を

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (a > 0, 0 \leq t \leq 2\pi)$$

とする。以下の問い 1)~4) に答えよ。

1) 曲線 C の長さを求めよ。

2) 曲線 C 上の曲率半径 $\frac{1}{|\kappa|}$ を t を用いて表せ。ただし、 κ は曲率であり、次式で表される。

$$\kappa = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

ここで、 $x' = \frac{dx}{dt}$, $y' = \frac{dy}{dt}$, $x'' = \frac{d^2x}{dt^2}$, $y'' = \frac{d^2y}{dt^2}$ である。

3) 曲線 C と x 軸に囲まれる部分の面積を求めよ。

4) 曲線 C を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ。

2

R^n におけるベクトル \mathbf{x} に対し, $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$ と定義する. $\mathbf{u}^T \mathbf{u} = 1$ を満たす任意の n 次元ベクトル \mathbf{u} に対して, $H(\mathbf{u}) = I_n - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T$ とするとき, 以下の問い 1) ~ 5) に答えよ. ただし, I_n は n 次の単位行列, $\mathbf{0}$ は零行列, T は転置を表す.

- 1) $H(\mathbf{u})^T = H(\mathbf{u})$ を示せ.
- 2) $H(\mathbf{u})$ は直交行列であることを示せ.
- 3) $H(\mathbf{u})$ の行列式 $\det H(\mathbf{u})$ を求めよ. 必要ならば, 任意の $n \times m$ 行列 A , 任意の $m \times n$ 行列 B に対し, $\det(I_n + AB) = \det(I_m + BA)$ が成り立つことを用いてもよい.
- 4) $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\|$ かつ $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ を満たす2つの n 次元ベクトル \mathbf{x}, \mathbf{y} に対し, $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}$ とするとき, $H(\mathbf{u})\mathbf{x} = \mathbf{y}$ を示せ.
- 5) $n \times n$ 行列 $H_1 = H(\mathbf{u}_1)$, $n \times n$ 行列 $H_k = \begin{pmatrix} I_{k-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{n-k+1} - 2\mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T \end{pmatrix}$ ($k \geq 2$) を定義す

る. また, $B_k = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,k} \\ 0 & b_{2,2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & b_{k-1,k} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{k,k} \end{pmatrix}$ ($k \geq 1$) は上三角行列とする. このとき, $n \geq m$

を満たす $n \times m$ 行列 A に対し, $\mathbf{u}_k^T \mathbf{u}_k = 1$ を満たす $(n - k + 1)$ 次元ベクトル \mathbf{u}_k を用いて, $H_k H_{k-1} \cdots H_2 H_1 A = \begin{pmatrix} B_k & C_k \\ \mathbf{0} & D_k \end{pmatrix}$ ($k = 1, \dots, m$) と表せることを数学的帰納法により示すとともに, \mathbf{u}_k の選び方を示せ. ただし, C_k は $k \times (m - k)$ 行列, D_k は $(n - k) \times (m - k)$ 行列である. また, $A = (H_m H_{m-1} \cdots H_2 H_1)^T \begin{pmatrix} B_m \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ と書けることを示せ.

3

以下の問い 1) ~7) に答えよ。

プログラム 1 は、メモリ上に連続して配置された `int` 型の値を整列するプログラムである。関数 `sort` の入力は一列に並べたい値群が格納されたメモリ領域の先頭アドレスと末尾アドレス（最後の要素が格納されたアドレス）である。

- 1) この整列アルゴリズムの名称を答えよ。
- 2) 値の個数を N としたとき、この整列アルゴリズムの平均時間計算量を答えよ。
- 3) プログラム 1 中の空欄 ~ を埋めよ。
- 4) プログラム 1 中の空欄 と を埋めよ。ただし、文は複数になってもよい。
- 5) メモリ上に連続して配置された `int` 型の値が $\{5, 7, 3, 4, 8, 1, 2, 9, 0, 6\}$ であるとき、これを整列しようと関数 `sort` を実行した。関数 `func` から関数 `sort` へリターンする瞬間のメモリ上の値の並びをリターンの発生順に記せ。
- 6) 値の個数を N としたとき、この整列アルゴリズムの最悪時間計算量を答えよ。また、どのような時に最悪となるのかについて説明せよ。
- 7) 問い 6) の最悪の場合を回避するためには、どうすれば良いか答えよ。

プログラム 1

```
void sort(int *sp, int *ep)
{
    int *vp;

    vp = func(sp, ep);

    if()
        sort(sp, vp-1);

    if()
        sort(vp+1, ep);
}

int *func(int *sp, int *ep)
{
    int *ip, *jp, pv, temp;

    ip = sp;
    jp = ep;
    pv = *jp;
    while(1) {
        while(*ip++ < pv)
            ;
        ;
        while( && pv < *jp)
            ;
        if(ip >= jp)
            ;
        
        ip++;
    }
    

    return ip;
}
```