

知能システム学 I

次の3問すべてを解答せよ。1問につき1枚の答案用紙を用いること。

1

以下の問い 1), 2) に答えよ。

1) 実数平面 \mathbb{R}^2 の次の性質を満たす系列 $D_n \subseteq \mathbb{R}^2$ を考える。

① D_n は有界である。

② 任意の有界な部分領域 $S \subseteq \mathbb{R}^2$ に対して、ある n_0 が存在し、すべての $n > n_0$ について、 $S \subseteq D_n$ となる。

このとき、 $f(x, y)$ を \mathbb{R}^2 上の連続関数とすると、①, ② を満たす任意の系列 D_n に対して、

$$G = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \, dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) \, dx dy$$

が成立することが知られている（ただし、 $\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x, y)| \, dx dy < \infty$ ）。次の小問 a), b) に答えよ。

a) D_n を適切に設定し、 $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$ としたときの G の値を求めよ。

b) 実数 $a > 0$ に対して、関数 $\Gamma(a)$ を次式で定義する。

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} \, dx$$

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} \, dx$ が成立することを示せ。また、 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ の値はいくらか。

2) I を実軸上のある区間とし、 $p(x)$ および $q(x)$ は区間 I で定義された実数値連続関数とする。

式(1)の微分方程式について、次の小問 a) ~ c) に答えよ。ただし、 $y' = \frac{dy}{dx}$ である。

$$y' + p(x)y = q(x) \quad \dots (1)$$

a) $q(x) \equiv 0$ とおいた斉次方程式の一般解が $y = e^{-\int p(x) dx + C}$ (C は任意定数) となることを示せ。

b) 式(1)の一般解を $y = c(x)u(x)$ とおく。 $u(x) = e^{-\int p(x) dx}$ として、 $c(x)$ を $q(x)$ と $u(x)$ を用いて表せ。

c) 式(1)の一般解を $p(x)$ と $q(x)$ を用いて表せ。また、導出した解を利用して、 $y' + y = \sin x$ を解け。

2

以下の問い 1), 2) に答えよ.

1) 次の小問 a), b), c) に答えよ.

a) 実数 x, y, z に関する2次形式 $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx$ を $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ となるように実対称行列 A を用いて表現し, 正定値 (正值) であるかどうかを調べよ. ただし, $\mathbf{x} = [x, y, z]^T$ とし, T は転置を表す.

b) 実対称行列 A の固有値がすべて正であることと, 2次形式 $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ が正定値 (正值) であることが同値であることを証明せよ.

c) 実数 a, b に対して, $\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$ が正定値 (正值) となるための必要十分条件を求めよ.

2) 次の小問 a), b) に答えよ.

a) 行列 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ が重複度 n ($n \geq 2$) の固有値 α をもち, $(A - \alpha E_n) \mathbf{a}_j = 0$ ($1 \leq j \leq m$), および $(A - \alpha E_n) \mathbf{a}_j = \mathbf{a}_{j-1}$ ($m+1 \leq j \leq n$) を満たす1次独立なベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ が存在するとき, 行列 $P = [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n]$ について次式が成り立つことを示せ. ただし, E_n は n 次の単位行列である.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}, \quad B = \text{diag}_{m-1}(\alpha, \dots, \alpha),$$

$$C = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & & O \\ & \alpha & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ O & & & \alpha & 1 \\ & & & & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n-m+1}.$$

O は要素がすべて0の零行列, diag_k は k 次の対角行列, \mathbb{C}^n は n 次元複素数ベクトルの集合を表す.

b) $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -6 \\ 6 & 6 & 7 \\ a & a & a \end{pmatrix}$ が重複度3の実数の固有値をもつとき, 実数 a の値を求めよ. また, A のジョルダン標準形を一つ求めよ.

3

以下の問い1)～2)に答えよ。

1) 二分探索木は、その木構造中のあるノード x に注目したときに、 x より左にある部分木に含まれる値は全てノード x の値よりも小さく、 x より右にある部分木に含まれる値は全てノード x の値よりも大きい性質を持つ。ここで扱う二分探索木では、同値の値が挿入されることはないものとする。以下の小問 a)～d)に答えよ。

a) ある二分探索木を行きがけ順でなぞった時、以下の結果を得た。どのような木構造であったか図示せよ。

6, 3, 1, 2, 5, 4, 8, 9

b) a)の二分探索木から、3の要素を削除した時、どのような木構造になるか図示せよ。

c) ハッシュ法に対する二分探索木の長所を2つ挙げよ。また、短所を1つ挙げよ。

d) プログラム1は、C言語で二分探索木にKEY型のデータ（プログラム2に示す構造体で管理される）を挿入する関数である。データそのものが探索のキーとなる。関数への引数は、挿入先の二分探索木の根ノードへのポインタと、挿入するKEY型のデータである。戻り値は、追加したノードへのポインタである。関数中の空欄【ア】～【カ】を適切に埋めよ。ただし、関数 `keyequal` と関数 `keylt` はプログラム3に示す引数と戻り値を持っている。関数 `keyequal` は、 a と b が等しければ1、そうでなければ0を返す。関数 `keylt` は、 $a < b$ であれば1、そうでなければ0を返す。

プログラム1

```

NODE *insert(NODE *root, KEY key)
{
    NODE **p;
    NODE *new;
    p = 【ア】; /* ルートから探索する */
    while (*p != NULL) {
        if (keyequal(key, 【イ】->data))
            return NULL;
        else if (keylt(key, 【イ】->data))
            p = 【ウ】;
        else
            p = 【エ】;
    }
    if ((new = malloc(【オ】)) == NULL) {
        printf("ERROR: Out of memory\n");
        exit(1);
    }
    new->left = NULL;
    new->right = NULL;
    new->data = key;
    【カ】 = new;
    return new;
}

```

プログラム2

```

typedef struct node {
    KEY data;
    struct node *left;
    struct node *right;
} NODE;

```

プログラム3

```

int keyequal(KEY a, KEY
b);
int keylt(KEY a, KEY b);

```

2) プログラム4は、文字列に含まれる文字'A'~'Z'と'a'~'z'を右のような規則で置き換える。関数convertの戻り値は、文字列sの全文字数とする（終端記号を含む）。以下の小問a)~c)に答えよ。

'A' → 'N'	'a' → 'n'
'B' → 'O'	'b' → 'o'
'C' → 'P'	'c' → 'p'
:	:
'N' → 'Y'	'n' → 'y'
'M' → 'Z'	'm' → 'z'
'N' → 'A'	'n' → 'a'
'O' → 'B'	'o' → 'b'
'P' → 'C'	'p' → 'c'
:	:
'Y' → 'L'	'y' → 'l'
'Z' → 'M'	'z' → 'm'

- a) QUESTIONのコメントが入っている行では、文字列の定義を行っている。このように定義すると、ポインタ変数sと文字列のデータはメモリ上にどのように配置されるか、図を用いて説明せよ。図中では、ポインタ変数sの内容と文字列の関係が分かるようにせよ。また、文字列がメモリ上でどれだけの領域を取るか分かるようにせよ。

b) プログラム4中の空欄【キ】と【ク】を適切に埋めよ。

c) プログラム4を実行すると以下のような結果になり、予想する結果とはならなかった。

```
After: Bfnxa Univ. NumChar: 4
```

- プログラム4には上記の結果を導く間違いがあるが、その間違いがどこにあるか、それがなぜ間違いなのか、どのようにプログラムを書き換えればそれを解決できるのかについて答えよ。

プログラム4

```
#include <stdio.h>
int convert(char *s);

int main(void){
    char *s="Osaka Univ."; /* QUESTION */
    int i;
    i=convert(s);
    printf("After: %s NumChar: %d\n", s, i);
    return 0;
}

int convert(char *s){
    int i, size;
    size = sizeof(s);
    for(i=0; i < size; i++){
        if( ('A' <= *s && *s < 'M') || ('a' <= *s && *s <= 'm') )
            【キ】;
        else if( ('N' <=*s && *s <= 'Z') || ( 'n' <= *s && *s <= 'z') )
            【ク】;
        s++;
    }
    return size;
}
```