

ARCH モデルを用いた経済時系列の同定について

学術番号：90124168 藤井研究室 山本 哲士

1 はじめに

時系列データを生み出している構造を推定するために、時系列データを説明するような数式モデルを構築する方法がある。このようなときに一般的に用いられるモデルとして AR モデルが挙げられるが、AR モデルでは正確に時系列データの構造を表すことができない場合が存在する。経済の時系列分析の分野でよくみられるように、分析の対象となる時系列が不均一な分散を持つ場合がこのような状況の代表的な例として挙げられる。これを解決するための 1 つの方法として ARCH モデルを導入することが挙げられる。本研究では ARCH モデルを拡張した GARCH モデルの効果を検証し、さらに入出力系への拡張を試みて、その有効性を実在する経済時系列の同定を通して検証する。

2 準備

2.1 AR モデル

AR(r) モデルは以下のように r 次の自己回帰構造と攪乱項 ϵ_t によって表される。

$$y_t = a_0 + \sum_{i=1}^r a_i y_{t-i} + \epsilon_t \quad (1)$$

ここで $\{y_t\}$ は時系列データ、 a_i は推定すべきパラメータである。そして、 $\{\epsilon_t\}$ は平均 0、分散 σ^2 の正規分布に従う白色雑音を仮定している。

2.2 ARCH モデル

経済時系列では大きな変動があった直後には大きな変動が起こりやすく、小さな変動があった後には小さな変動が続くという性質から、不均一な分散を持つ時系列データが多く存在する。そして、実際に分散が不均一な時系列データを AR モデルを用いて推定すると、残差 $\hat{\epsilon}_t = y_t - (\hat{a}_0 + \sum \hat{a}_i y_{t-i})$ が正規分布に従う白色雑音であるという仮定を満たさなくなり正確にモデル化されているとはいえないことが多い。ARCH モデルでは、対象となる時系列データだけでなく、その時系列の分散もモデル化することで不均一分散を持つ時系列の構造を捉える。このモデルでは y_t を条件付平均 m_t と攪乱項 ϵ_t の和として $y_t = m_t + \epsilon_t$ のように表す。また、分散 h_t は q 期前までの攪乱項の 2 乗値の加重和として表される。より一般化された表現として自己回帰構造を導入した GARCH(p, q) モデルの分散は以下のように与えられる。

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i h_{t-i} + \sum_{i=1}^q \beta_i \epsilon_{t-i}^2 \quad (2)$$

さらに、条件付平均 m_t として AR(r) モデルのように時系列の r 次の自己回帰構造を考えたときこれを AR(r)-GARCH(p, q) モデルと呼ぶ。

3 入出力構造の導入

経済時系列は独立に変化するのではなく互いになんらかの関係を持って変化している場合が多い。この関係性をモデルに含めるために分析対象となる時系列を出力変数 $\{y_t\}$ とみなし、入力変数 $\{u_t\}$ として他の時系列を用いる。すなわち、 $\{y_t\}$ と $\{u_t\}$ の間に

$$y_t = a_0 + \sum_{i=1}^r a_i y_{t-i} + \sum_{i=1}^s b_i u_{t-i} + \epsilon_t \quad (3)$$

のような構造を与えることで、2 つの時系列データの因果関係をとらえることができると予想される。さらに、分散のモデルは (2) と同様に与えることで不均一分散の状況も同時にとらえることも期待できる。

4 数値例

前節で導入した入出力構造をもつモデルを用いて、1997/10/1 から 2005/12/21 までの日経平均株価を出力、同期間のダウ式平均株価を入力として実際にモデルを推定した。予備推定の結果よりモデルの次数は ARX(1,1)-GARCH(1,1) を採用した。また、比較対象として AR(1)-GARCH(1,1) モデルについて日経平均株価のモデルパラメータ推定を行った。推定にはデータの前半 1000 営業日分のデータを使い、信頼区間は推定したパラメータを基に全期間のデータを用いて計算を行った。ここでは 95% 信頼区間を求めている (1 期以上前の情報から t 期の値がある区間内の値をとる確率が 95% であるとき、その区間を 95% 信頼区間という)。図 1 に ARX-GARCH モデルから求めた信頼区間を一部分プロットした。また、図 2 に求めた信頼区間幅から AR-GARCH モデルの信頼区間幅を差し引いた値をプロットした。この図で直線は差の平均値を表しており、その値が負なので全般にわたって信頼区間の幅を狭くすることができたことがわかる。

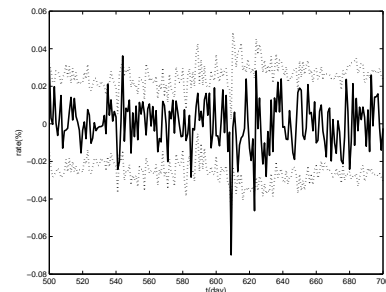


図 1: 日経平均株価収益率と信頼区間 (一部)

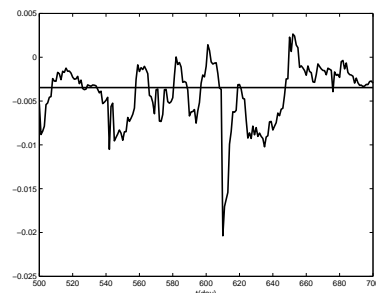


図 2: 信頼区間幅の差

5 おわりに

GARCH モデルを入出力系に拡張することで他の時系列との関係をモデルに持たせることにより、信頼区間幅を小さくする、すなわち信頼度の高いモデルを得ることができた。