時間駆動型事象をもつハイブリッドシステムの状態フィードバック制御

学籍番号：90104108　潮 研究室　土江 慶幸

1 緒論

コンピュータ制御システムにおいて, サンプリング等の制御動作は一定時間毎に駆動されるのが普通である. 時刻により駆動される制御動作を陽に扱うモデルとしてサンプル値ハイブリッドオートマトン (SDHA) が提案され, その検証について議論されている [1]. しかし SDHA の制御に関しては未だ議論されていない. そこで本報告では, SDHA の状態フィードバック制御問題について, 特にシステムの制御不変性について議論する [2].

2 準備

ハイブリッドシステムのセマンティクスを定義するためにラベル付トランジションシステム $T = (Q, Act, \mathscr{T}, Q_0)$ を用いる. T は状態をノードとし, 遷移関係を定義することでシステムの振る舞いを記述する. 但し, Q は状態集合であり, Act はラベル集合である. また, $\mathscr{T} \subseteq Q \times Act \times Q$ は状態遷移関係の集合であり, $Q_0 \subseteq Q$ は初期状態集合である. $\mathscr{P}(Q)$ を Q 上で定義される述語全体の集合とする. 述語 P は状態に対して 1 または 0 を示し, $P(q) = 1$ ならば状態 q で真であり, $P(q) = 0$ ならば状態 q で偽であるという. 本報告では制御仕様を述語で与える. 述語集合 $\mathscr{P}(Q)$ 上の半順序関係 "$\leqslant$" を次式で定義する: $P_1, P_2 \in \mathscr{P}(Q)$ および各 $q \in Q$ に対し, $P_1 \leqslant P_2 \Leftrightarrow P_1(q) \leq P_2(q)$.

任意のラベル $a \in Act$ に対し, 述語を以下に定義する.

$$D_a(q) = \begin{cases} 1 & \text{If } a \in \{\tilde{a} \in Act | {}^{\exists} q' \in Q \text{s.t.} (q, \tilde{a}, q') \in \mathscr{T}\}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{1}$$

$$wp_a(P)(q) = \begin{cases} 1 & \text{If } Post(q, a) \neq \emptyset \text{ and} \\ & P(q') = 1 (\text{ for any } q' \in Post(q, a)), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2}$$

$$wlp_a(P) = wp_a(P) \ \vee \ \neg D_a. \tag{3}$$

但し, $Post(q, a) = \{q' \in Q \mid (q, \ a, \ q') \in \mathscr{T}\}$ である. さらにラベルの部分集合 $A \subseteq Act$ に対して以下のように拡張する: $wp_A(P) = \bigvee_{a \in A} wp_a(P)$. また P が $(T; A)$-不変であるとは, 任意の ${}^{\forall} a \in A$ に対し $P \leqslant wlp_a(P)$ が成り立つことをいう.

3 被制御サンプル値ハイブリッドオートマトン (cSDHA)

SDHA とはクロック付事象と呼ばれる時間駆動型事象をもつハイブリッドオートマトンと, クロック付事象が同期する時刻列 (サンプル時刻) を規定するクロック構造からなる. 本報告では SDHA に強制事象をもつ制御機構を導入する. 但し, 強制事象とはガードを満たしている限り, 制御器による強制生起が可能な事象である. 強制事象およびクロック付・なし事象をもつハイブリッドオートマトン H を次式で定義する.

$$\begin{aligned} H = (&V, E, \Sigma, \Sigma_{con}, \Sigma_{uncon}, \Sigma_{forc}, \\ &\Sigma_{cl}, \Sigma_{uncl}, X, init, Flow, jump). \end{aligned} \tag{4}$$

$Q_H \subseteq V \times X$ を H の状態集合とする. Σ は事象全体の集合である. Σ_{con} と Σ_{uncon} は, それぞれ可制御・不可制御事象集合である. また, Σ_{forc} とは強制事象集合を表し, $\Sigma_{forc} \subseteq \Sigma_{con}$ と仮定する. Σ_{cl} と Σ_{uncl} は, それぞれクロック付・なし事象集合を表す. クロック付事象とはガードを満たし, かつ時刻がサンプル時刻であれば生起可能な事象である. クロックなし事象とはガードを満たせば生起可能な従来の事象である. E はラベル付有向枝の集合であり, $init$ は初期状態を規定する. $Flow = \{f_v | \dot{x} = f_v(x), v \in V\}$ は各節点でのダイナミクスを定義し, $jump$ とは離散遷移に対応するジャンプ条件を表す.

仮定 1 (1) 強制事象のガードは閉集合である. **(2)** 自己ループとなる枝は存在しない.

従来のコンピュータ制御等の分野において, 制御器やセンサーは, 予め定められた周期で駆動されるとしている. また, プロセッサの計算時間等を考慮すればサンプル時刻にはジッターが生じる. そこで本報告では, Silva と Krogh が定義したクロック構造を次のように限定する [1]. ノミナルなサンプル時刻列 θ を初期位相 θ_0, 周期 T_θ の時刻列とする. このノミナルなサンプル時刻列 θ に対して, 実際にシステムと同期するサンプル時刻列 $c = c_0 c_1 \ldots$ を規定する修正クロック構造 $C(\theta, J)$ を次式で定義する: $C(\theta, J) = \{c_n | \text{for } {}^{\forall} n \geq 0, c_n = \theta_n + J_n, J_n \in [0, J]\}$. 但し, J は最大ジッターであり, $T_\theta > J$ と仮定する. 以上により cSDHA を $H_C = (H, C)$ と定義する.

3.1 状態フィードバック制御器 $f = (f_{cl,1}, f_{cl,2}, f_{uncl,1}, f_{uncl,2})$

cSDHA H_C に対して状態フィードバック制御器 $f(q, t)$ を定義する. 但し, $q \in Q_H$, $t \in \Re_{\geq 0}$ である. $f_{cl,1}(q, t)$ とは状態 q, 時刻 t において制御器によって生起可能なクロック付事象集合であり, $f_{cl,2}(q, t)$ とは制御器より強制生起させるクロック付き事象の集合である. $f_{uncl,1}$ と $f_{uncl,2}$ も同様である. 一般に制御器 f は時刻にも依存する. これはクロック付事象がいつ生起可能であるかに制御動作が依存するためである. $Flow$ が時不変であり, 制御仕様が状態のみに依存するためノミナルなサンプル時刻列の周期性により, 次のような周期性を仮定してもよい: 任意の状態 $q \in Q_H$, 時刻 $t \geq \theta_0$ に対し, $f_{i,j}(q, t) = f_{i,j}(q, t + T_\theta)$. 但し $i \in \{cl, uncl\}$, $j \in \{1, 2\}$ である. なお制御器 f により制御された SDHA モデルを H_C^f と表記する.

3.2 controlled timed/time-abstract transition system

制御仕様 P の cSDHAH_C^f のセマンティクスとして cTTS と cTATS を定義する. cTTS は $S_C^t(H_C^f, P) = (Q_t, \mathscr{T}_t^f, Act_t, Q_{t0})$ と表される. 各状態は時刻に関する変数持つ. これはシステムがサンプル時刻に依存するため, オートマトン上の状態だけでは以降の振る舞いが決定できないからである. $Act_t \subseteq \Sigma \cup \Re_{>0}$ は事象集合である. $\Re_{>0}$ に対応する遷移は, 離散遷移が起きないダイナミクスによる遷移に対応し, 遷移にかかる経過時間を遷移関係のラベルとする. 時間経過による遷移を 2 種類の遷移に大別したのが cTATS であり, $S_C^a(H_C^f, P) = (Q_a, \mathscr{T}_a^f, Act_a, Q_{a0})$ と表す. 状態は cTTS と同一である. また $Act_a \subseteq \Sigma \cup \{\tau_{uncon}, \tau_{con}\}$ である. 遷移途中で, 強制事象の生起により遷移を妨げることができるならば τ_{con} による遷移とみなし, 逆にできないならば τ_{uncon} による遷移として定義される. 制御されていない cSDHA の cTTS と cTATS を $S_C^t(P)$ と $S_C^a(P)$ と略記する.

4 制御不変と最大制御不変部分述語

制御不変とは, 一度システムの状態が制御仕様を満たせば, それ以降, 仕様から外れないように制御できるという概念である. 述語 P が制御不変であるとは P が $(S_C^t(H_C^f, P); Act_t)$-不変であるような f が存在することをいう. また, P が $(S_C^t(P); \Re_{>0}, \Sigma_{forc})$-不変であるとは任意の時間 $\delta \in \Re_{>0}$ に対して, $P \leqslant \neg D_\delta \vee wp_{\Sigma_{forc}}(P) \vee (twp_{C,\delta}(P) \wedge pc_{C,\delta}(P))$ が成り立つことをいう. 但し, $pc_{C,\delta}(P)$ とは δ による遷移軌道が出発点と終着点を除いて, 述語を満たす状態集合の内部に存在するならば真を示す述語である. また, $twp_{C,\delta}(P)$ とは δ による遷移が, 開始してから δ 時間経過するまでに, 強制事象生起によって妨げることができるならば真を示す述語である.

定理 1 cSDHA H_C および述語 $P \in \mathscr{P}(Q_a)$ に対して, 次の条件は互いに同値である: **(1)**P は制御不変である. **(2)**P は $(S_C^t(P)$; $\Sigma_{uncon}, \Re_{>0}, \Sigma_{forc})$-不変である. **(3)**$P$ は $(S_C^a(P)$; $\Sigma_{uncon} \cup \{\tau_{uncon}\})$-不変である.

一般に述語 P は制御不変ではない. 但し, 任意の述語 P は述語 $\mathbf{0}$ ($\mathbf{0}(q) = 0$ for ${}^{\forall} q \in Q_H$) 等の制御不変な部分述語をもつ. 次定理で常に最大制御不変部分述語が存在することを示す.

定理 2 I をインデックス集合とする. 各 $i \in I$ に対して, $P_i \in \mathscr{P}(Q_a)$ が $(S_C^a(P_i);\Sigma_{uncon} \cup \{\tau_{uncon}\})$ -不変であるならば, $P_I = \bigvee_{i \in I} P_i$ は $(S_C^a(P_I);\Sigma_{uncon} \cup \{\tau_{uncon}\})$ -不変である.

次に最大部分制御不変部分述語 $P^{\uparrow}$ の計算手法を提案する.

定理 3 任意の述語 $P (= P_0) \in \mathscr{P}(Q_a)$ に対し, 反復法を与える: $P_{j+1} = P_j \wedge \Psi(P_j)$ (${}^{\forall} j \geq 0$). このとき $P_{k+1} = P_k$ ならば $P^{\uparrow} = P_k$ である. 但し, Ψ は次に定義される述語の写像である.

$$\Psi(P)(q_a) = \begin{cases} 1 & \text{If } \bigwedge_{\sigma \in \hat{\Sigma}} wlp_\sigma(P)(q_a) = 1 \text{ in } S_C^a(P), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{5}$$

また $\hat{\Sigma} = \Sigma_{uncon} \cup \{\tau_{uncon}\}$ としている.

5 結論

cSDHA を提案し, そのセマンティクスとして cTTS と cTATS を定義した. また, cSDHA の状態フィードバック制御器を提案し, 述語が制御不変であるための必要十分条件を示した. さらに任意の述語に対し常に最大制御不変部分述語が存在することを示し, 導出手法を提案した. しかし, 一般に最大制御不変部分述語を求めるための手続きは決定不能であり, 近似計算アルゴリズムの開発が今後の課題である.

参考文献

[1] Silva, B. I. and B. H. Krogh, *40th IEEE CDC*, 762-767, (2001)

[2] Ushio, T. and S. Takai, *Automatica*, **41**, 669–675, (2005)