利得の再配分を考慮した離散時間レプリケータダイナミクス

学籍番号：90114139　潮 研究室　福本　靖彦

1　緒論

集団において，個人個人が利己的に振舞うとき，必ずしも全体として良い結果を生まない．そこで，進化ゲーム理論の分野では，利得を回収・再配分する政府を導入することでこの問題の解決を図る方法が提案されている [1]．しかしながら提案されているモデルでは，集団の戦略分布の推移が連続時間ダイナミクスとして記述されている．一般に社会システムでは利得の回収と再配分は離散時間的に行われると考えられる．したがって本報告では，離散時間でのダイナミクスの定式化を行い，性質を考察する．

2　利得の再配分と集団の離散時間ダイナミクス

集団の中からランダムに 2 人のプレイヤーが選び出されて 2 人ゲームを行うことを考える．ただし，ゲームで得られた利得は一度政府によって回収され，ある割合で再配分されるとする．ゲームを行うとそのプレイヤーは死に，代わりにそのプレイヤーに再配分された利得の大きさに応じてそのプレイヤーと同じ戦略をとるプレイヤーが生まれるとする．以上の枠組みの下で，集団内の戦略の分布を調べる．

$x_i[t]$ を戦略 i をとるプレイヤーの集団内のシェア，$x = (x_1, \dots, x_n)$ を集団内の戦略分布を表すベクトル，$u(e_i, x)$ を戦略 i をとるプレイヤーの得る利得，$u(x, x)$ を集団内の平均利得，q_{ji} を戦略 j をとるプレイヤーがゲームで得た利得のうち戦略 i をとるプレイヤーに再配分される利得の割合，τ を時間刻み幅，β をすべてのプレイヤーがもつ基礎出生率とする．また，各プレイヤーがゲームを行う確率も τ とする．このとき，x_i の変化を表す離散時間ダイナミクスは

$$x_i[t+\tau] = \frac{(r-1)x_i + \sum_j \Big(\beta + u(e_j, x[t])\Big) x_j[t] q_{ji}}{r - 1 + \beta + u(x[t], x[t])}$$

となる．ただし，$r = 1/\tau$ である．

変異率 q_{ji} にクロネッカーのデルタ δ_{ji} を代入すると，政府は集団を放任していることに相当する．また，変異率 q_{ji} に x_i^* を代入すると，政府がすべての利得を回収し，目標状態の割合で再配分することに相当し，集団状態は目標状態に収束する．そこで，政府の介入度 $\alpha \in [0, 1]$ を導入し，これらの凸結合である

$$q_{ji} = (1-\alpha)\delta_{ji} + \alpha x_i^*$$

を用いると，放任・完全統制だけでなく，いろいろな介入度合いを表すことができる．これによって，利得の再配分を考慮に入れたレプリケータダイナミクス

$$\begin{aligned} x_i[t+\tau] =& \frac{\Big\{ r - 1 + (1-\alpha)\Big(\beta + u(e_i, x[t])\Big) \Big\} x_i[t]}{r - 1 + \beta + u(x[t], x[t])} \\ &+ \frac{\alpha \Big(\beta + u(x[t], x[t])\Big) x_i^*}{r - 1 + \beta + u(x[t], x[t])} \end{aligned}$$

が求まる．このダイナミクスは $\tau \to 0$ で連続系のダイナミクスになる．また，$\alpha = 0$ で利得の再配分がないダイナミクスになり，$\alpha = 1$ で x^* は大域的に漸近安定である．

3　例題

利得が表 1 で表されるゲームを例にとって考える．このゲームは「囚人のジレンマ」と呼ばれるゲームであり，ゲーム理論の分野では最も有名なゲームである．相手がどちらの戦略をとっても，戦略 2 をとった方が高い利得を上げられるため全てのプレイヤーが戦略 2 を取る状態である $(0, 1)$ が唯一の安定な平衡点であり，$(1, 0)$ は不安定な平衡点となっている．しかしながら $(1, 0)$ のときの方が平均利得が大きいので，全体が $(1, 0)$ に収束することを目標とする．

表 1　戦略と利得の関係

		対戦相手の戦略	
		1	2
自分の戦略	1	4	0
	2	5	3

目標状態を $x^* = (1, 0)$ とし，x^* の周りで線形化を行って安定性を調べると，$\alpha = 0.2$ でトランスクリティカル分岐が発生し，$\alpha \in (0.2, 1]$ のとき x^* が漸近安定となることがわかる．また，$\alpha = 0$ のとき安定な平衡点 $(0, 1)$ は α を増加させると図 1 のように変化し，$\alpha = (9 - 6\sqrt{2})/2$ のとき，サドルノード分岐によって消滅する．したがって，$\alpha = 0.2$ と，$\alpha = (9 - 6\sqrt{2})/2$ を境にして安定平衡点は急激に変化することになる．シミュレーションを行い，戦略 1 のシェア x_1 と時間 t の関係を調べたところ，図 2,3,4 のようになった．図より，α を大きくすることで不安定な平衡点であった $(1, 0)$ が安定化され，さらに α を大きくすることで $(1, 0)$ が大域的に漸近安定な平衡点に変化することがわかる．

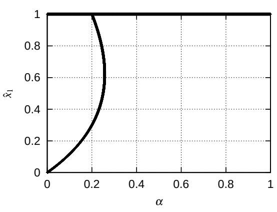

図 1　α と平衡点 $\hat{x}_1$ の関係

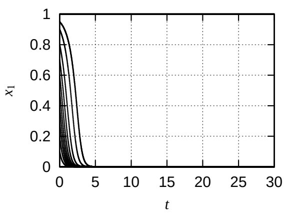

図 2　$\alpha = 0$ のとき

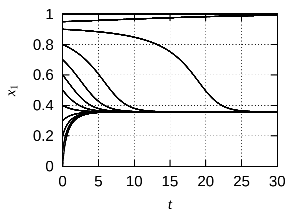

図 3　$\alpha = 0.22$ のとき

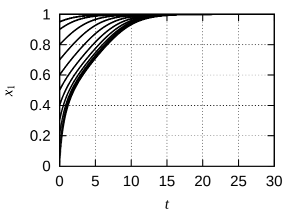

図 4　$\alpha = 0.3$ のとき

4　結論

集団を統制する政府の役割として，利得の回収と再配分を行う離散時間ダイナミクスを導出し，その性質について考察を行った．

参考文献

[1] 後藤・金澤・潮,“利得の再配分のあるレプリケータダイナミクスの安定解析”, 電子情報通信学会 ソサイエティ大会 A-2-16, 2005.