多項式非線形システムの解軌道設計

学籍番号：90123711　藤井研究室　庄司 和正

1 はじめに

本研究では非線形システムの安定解析として，不変性条件，ラサールの不変性原理，二乗和などを用いて吸引領域の拡大や特定の領域を回避する制御入力，内積を用いて特定のベクトル場を整形する制御入力を設計する．また，吸引領域，領域回避，特定のベクトル場の整形で得られる複数の制御入力を用いて，切り替え制御を行い非線形システムの解の軌道を設計することを考える．

2 準備

次の多項式非線形システムを考える．

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad f(x), g(x) \in \mathbf{R}[x] \tag{1}$$

$\mathbf{R}[x]$ は多項式関数の集合，$\Sigma[x] \subset \mathbf{R}[x]$ は二乗和で表される多項式関数の集合を表す．関数 $V(x)$ のレベルセットを $\mathcal{L}_V(c) = \{x \mid V(x) \leq c\}$ と表す．

補題 1　＜不変性条件＞

集合 $\mathcal{S} = \mathcal{L}_V(c), {}^{\exists}c \in \mathbf{R}$ を考え，$\mathcal{S}$ の境界 $\partial\mathcal{S}$ での法線方向を $n(x) = \partial V(x)/\partial x$ と表す．このとき次が成立する．

$\mathcal{S}$ は正 (負) 不変集合

$$\Leftrightarrow \dot{V}(x) = \langle n^T(x), \dot{x} \rangle \leq (\geq) 0 \quad {}^{\forall}x \in \partial\mathcal{S}$$

吸引領域：平衡点である原点が漸近安定であるとき，次のように定義される集合 $\mathcal{A} := \{x_0 \mid \lim_{t\to\infty} x(t, x_0) = 0\}$ は，原点の吸引領域と呼ばれる．時刻 $t = 0$ で x_0 を通る解を $x(t, x_0)$ と表す．吸引領域の部分集合で正不変集合となっているものを部分吸引領域と呼ぶ．

補題 2

集合 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ は有界で，$\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$，$\Omega := \mathcal{B} \cap \mathcal{A}^c$，$\mathcal{A}$ は部分吸引領域とする．条件 $V(x) = c \quad {}^{\forall}x \in \partial\mathcal{B}, \Omega \subset \mathcal{L}_V(c)$, $\dot{V}(x) < 0 \quad {}^{\forall}x \in \Omega$ を満たす関数 $V(x)$ とある実数 c が存在すれば，$\mathcal{B}$ は部分吸引領域である．

3 制御入力の設計

状態フィードバック $u = u(x) \in \mathbf{R}[x]$ を設計する．

3.1 吸引領域の拡大

関数 $V(x)$ と実数 a，b，$\mathcal{L}_V(a)$，$\mathcal{L}_V(b)$ を用いて補題 2 の条件を考えると，$\mathcal{A} = \mathcal{L}_V(a)$ が部分吸引領域であるとすれば，$\mathcal{B} = \mathcal{L}_V(b)$ が部分吸引領域であるためには，

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x}(f(x) + g(x)u(x)) < 0 \quad {}^{\forall}x, a < V(x) \leq b \tag{2}$$

となればよい．この条件を二乗和多項式緩和問題に置き換えれば次のようになる．

given $a, \epsilon_i, \epsilon_b \geq 0 \quad i = 1 \ldots 3, V(x), f(x), g(x)$

find $b, u(x), \lambda_1(x), \lambda_2(x), \lambda_3(x)$

s.t. $-\lambda_1(x)\frac{\partial V(x)}{\partial x}(f(x) + g(x)u(x))$
$- \lambda_2(x)(V(x) - a) - \lambda_3(x)(b - V(x)) \in \Sigma[x]$
$b - a - \epsilon_b,\ \lambda_i(x) - \epsilon_i \in \Sigma[x] \quad i = 1 \ldots 3$

二乗和多項式緩和問題は，未知の関数同士の積がある場合は解けないので，積がある場合はどちらかの関数を固定する必要がある．

3.2 領域回避

負不変性条件を用いれば，解軌道が進入しないような領域を状態空間に設けることができる．関数 $V(x)$ と実数 b，$\mathcal{L}_V(b)$ を用いて領域回避の条件を考えると，

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x}(f(x) + g(x)u(x)) \geq 0 \quad {}^{\forall}x \in \partial\mathcal{L}_V(b) \tag{3}$$

となれば，$\mathcal{L}_V(b)$ の外から来た解軌道は $\mathcal{B}$ に進入しない．

3.3 内積を用いたベクトル場の設計

ある領域内のベクトル場を整形する制御入力を設計する方法として，関数 $V(x)$ の偏微分の代わりに任意に定めるベクトル $w(x)$ との内積を用いた条件 $\langle w(x), (f(x) + g(x)u(x)) \rangle \geq (>) 0$ を用いればベクトル場のおおまかな設計ができる．

3.4 解軌道の設計

複雑な解の軌道を設計するには，複数の制御入力を組み合わせ切り替え制御とすることで，任意に解の軌道を整形することができると考えられる．

3.5 入力制約

関数 $V(x)$ と実数 a, b および実数 $M > 0$ を用いて入力の制約条件を考えると，$|u(x)| \leq M, {}^{\forall}x, a \leq V(x) \leq b$ となる．3.2 節，3.3 節，3.5 節の条件も 3.1 節と同様に二乗和多項式緩和問題に置き換えることができる．

4 数値例

次のシステムについて考える．

$$\dot{x_1} = -x_1 + x_2 + u$$
$$\dot{x_2} = -x_2 + 0.1{x_1}^2 + 0.01u$$

$V_0(x) = {x_1}^2 + {x_2}^2$，$V_1(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 12)^2$，$V_2(x) = (x_1 - 15)^2 + (x_2 - 15)^2$，$V_3(x) = (x_1 - 12)^2 + (x_2 - 4)^2$ とする．はじめに，上記のシステムに対して，点 (0,0) について部分吸引領域を推定した結果 $\mathcal{L}_{V_0}(180.69)$ を得た．次に，状態空間全域を吸引領域とする制御入力を設計した (Fig.1)．さらに，領域 $\mathcal{L}_{V_1}(9)$，$\mathcal{L}_{V_2}(9)$，$\mathcal{L}_{V_3}(9)$ に解軌道が進入しないような制御入力を設計した (Fig.2)．

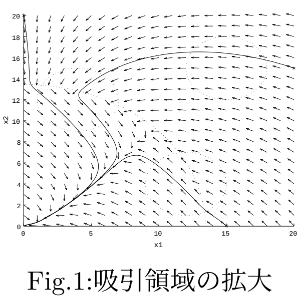

Fig.1:吸引領域の拡大

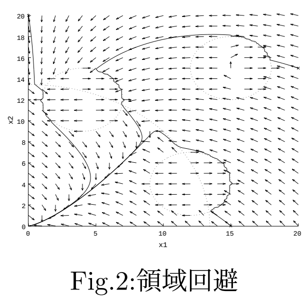

Fig.2:領域回避

5 おわりに

多項式非線形システムにおける部分吸引領域の拡大，領域回避を行うための制御入力を構成する手法について述べた．また，それらの手法を用いて入力の切り替え制御により解の軌道を設計する方法を提案した．本手法は二乗和多項式緩和を利用しているので柔軟な条件の付加ができ，入力の制約以外にもロバスト安定性などに応用できる．