区分的アファインシステム同定問題におけるサポートベクターマシンの改良

学籍番号：90153006　潮 研究室　伊久美 亮太

1　はじめに

ハイブリッドシステム表現の一つである "外部入力を持つ区分的アファイン自己回帰 (PWARX: Piece-Wise affine Auto Regressive eXogeneous) モデル" の同定に関する研究が最近注目を集めている．PWARX モデルは，入力 $u[k]$ と出力 $y[k]$ から構成される回帰ベクトル

$$x[k]=[y[k-1]^{\mathrm{T}},\ldots,y[k-n_y]^{\mathrm{T}},u[k-1]^{\mathrm{T}},\ldots,u[k-n_u]^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$$

が s 個の多面体領域 $\mathcal{X}_i=\{x\in\mathbf{R}^n : E_ix\geq 0\}$ のどの領域に属するかによってダイナミクスが切り替わるもので

$$y[k]=\theta_i^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} x[k] \\ 1 \end{bmatrix}+e[k]\ \text{ if } x[k]\in\mathcal{X}_i \tag{1}$$

で記述される ($e[k]$ は観測雑音, θ_i は各サブモデルのパラメータ). PWARX モデルの同定は，観測データ $\{x[k]\ y[k]\}_{k=1,\ldots,N}$ が与えられた時，$\mathcal{X}_i$ と θ_i を求める問題である．一般に多面体領域 $\mathcal{X}_i$ の同定にはマルチクラスの識別を可能とする SVM(Support Vector Machine) を用いる必要がある．しかし，一般のマルチクラス SVM は任意の 2 クラス $i,j(i,j=1,\ldots,s,\ i\neq j)$ の間を識別する分離超平面を決定するものであるため，この 1 対 1 識別を組み合わせてマルチクラス問題を解いた場合，識別不能領域が存在することが知られている．一方，1 対多識別が可能なマルチクラス SVM も提案されているが，これを用いて $\mathcal{X}_i$ を同定すると分離超平面のパラメータを一意に定めることができない場合があるために，多面体領域の同定に用いられていない．本報告では 1 対多識別のマルチクラス SVM を改良し，PWARX モデルを同定する手法を提案する．

2　マルチクラスサポートベクターマシン

マルチクラス SVM は m 点のデータ x に対し，全クラスの識別ができるような識別関数

$$f_i(x)=\arg\max_i(x^{\mathrm{T}}\omega^i-\gamma^i) \tag{2}$$

を与えるものである．この関数の重みベクトル $\omega^i\in\mathbf{R}^n$ と閾値 $\gamma^i\in\mathbf{R}$ は,

$$\begin{array}{ll}\displaystyle\min_{\omega^i,\gamma^i} & \displaystyle\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{i-1}\|\ \omega^i-\omega^j\ \|^2+\sum_{i=1}^{s}\|\ \omega^i\ \|^2 \\ \text{s.t.} & A^i(\omega^i-\omega^j)-e^i(\gamma^i-\gamma^j)-e\geq 0 \\ & i,j=1,\ldots,s,\ i\neq j\end{array} \tag{3}$$

を解くことで導出できる．ただし A^i はクラス i に属するデータで構成される行列である．また，$e^i\in\mathbf{R}^{m_i}$ は要素がすべて 1 のベクトルである．(3) 式の行列表記は

$$\min_{\omega,\gamma}\ \|\ \bar{C}\omega\ \|^2+\|\ \omega\ \|^2\quad\text{s.t. } \bar{A}\omega+\bar{E}\gamma-e\geq 0 \tag{4}$$

である．ただし，$\omega=[\omega^{1\mathrm{T}},\ldots,\omega^{s\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，$\gamma=[\gamma^1,\ldots,\gamma^s]^{\mathrm{T}}$ とする．また，E_i は導出した分離超平面から定義することができる．

3　ソフトマージン法との融合

(4) 式の 2 次計画問題は解析的に解くことができないために，データ数が膨大になると解の導出が困難になる．そこで，$\eta=\begin{bmatrix}\omega\\ \gamma\end{bmatrix}$, $\hat{C}=\begin{bmatrix}\bar{C} & 0\\ 0 & \bar{D}\end{bmatrix}$, $\hat{A}=[\bar{A}\ \bar{E}]$ とし，データと補助平面との距離を表すベクトル $y=\hat{A}\eta-e$ と重み M を用いて

$$\begin{array}{ll}\displaystyle\min_{\eta} & \lambda(\|\hat{C}\eta\|^2+\alpha\|\eta\|^2)+(1-\lambda)\|My\|^2 \\ \text{s.t.} & \hat{A}\eta-e=y\end{array} \tag{5}$$

とすることで問題点を解決する．(5) 式の最適解は

$$\eta=\left[\hat{\lambda}(\hat{C}^{\mathrm{T}}\hat{C}+\alpha I)+\hat{A}^{\mathrm{T}}M^2\hat{A}\right]^{-1}\hat{A}^{\mathrm{T}}M^2e,\ \hat{\lambda}=\frac{\lambda}{1-\lambda} \tag{6}$$

として解析的に得ることができる．この手法では，クラス識別に関する強い制約がないため，クラスを完全に分離するハードマージン問題に対応できない．ところが，(1) 式にはノイズが含まれているため，x を厳密に分離することを強く要求される問題でもない．したがって,

$$z=\hat{A}\eta \tag{7}$$

を用いて，どのデータが識別誤りかを判別し，重み M の値を調整することでハードマージン問題にも対応できる.

4　シミュレーション

$s=3$ として (1) 式のパラメータを適当に与え，生成したデータを提案手法を用いて分離超平面を導出した．図 2 に示す通り，真値 (図中の破線) に対し，データを完全に分離する分離超平面 (図中の実線) が求まっている.

5　おわりに

マルチクラス SVM を改良し，PWARX モデルの多面体領域を同定する手法を提案するとともにシミュレーションにより提案手法の有効性を確認した.

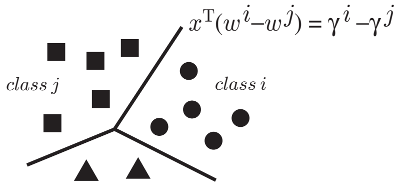

図 1　マルチクラス SVM の分離超平面

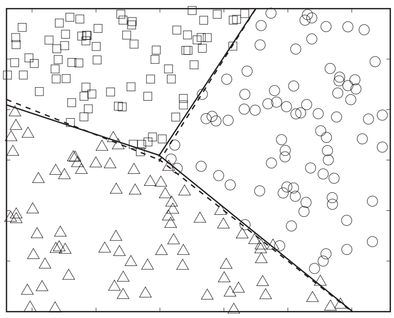

図 2　提案手法による識別結果