レプリケータダイナミクスの安定解析 –2および3戦略非対称ゲームの場合–

学籍番号：90103114　潮 研究室　日浦 尚利

1　序論

一般にゲーム理論では，全てのプレイヤーが合理的に行動すると仮定されている．この仮定を取り除いたものに，進化ゲーム理論がある [1, 2]．進化ゲーム理論では，各純粋戦略をとるプレイヤーの割合が利得に応じて増減すると考える．戦略分布の時間変化を表現するものとして，レプリケータダイナミクスが導入されている．本報告では，2 戦略 3 集団および 3 戦略 2 集団非対称ゲームのレプリケータダイナミクスの安定解析を行なう．

2　非対称ゲームのモデル

多数のプレイヤーからなる n 個の集団が共存する状況を考える．n 個の集団をそれぞれ $P_1, P_2, \cdots, P_n$ とし，プレイヤー全体に対して集団 P_i に属するプレイヤーの占める割合を α_i とする．全集団において純粋戦略集合と混合戦略集合は共通で，それぞれ $\Phi = \{1, 2, \cdots, m\}$，$S$ と表す．混合戦略空間は $S^n = \{(s_1, s_2, \cdots, s_n) | s_i \in S,\ i = 1, 2, \cdots, n\}$ となる．集団 P_i に属するプレイヤーの利得行列を A_i とする．時刻 t において，集団 P_i に属し純粋戦略 j をとるプレイヤーの割合を $s_i^j(t)$ とする．集団 P_i の集団状態を $s_i(t) = (s_i^1, s_i^2, \cdots, s_i^m)^{\mathrm{T}} \in S$，集団全体の状態を $s(t) = (s_1, \cdots, s_n) \in S^n$ と表す．集団 P_i において純粋戦略 j をとるプレイヤーの増加率 $\dot{s}_i^j / s_i^j$ が，そのプレイヤーの利得と，集団 P_i に属するプレイヤーの平均利得の差に等しいとすると，レプリケータダイナミクスは，$i = 1, 2, \cdots, n,\ \ j \in \Phi$ に対して，

$$\dot{s}_i^j = s_i^j (e^j - s_i)^{\mathrm{T}} A_i \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k s_k \right) \tag{1}$$

となる．ただし，e^j は第 j 成分が 1 の m 次元単位列ベクトルである．

3　2 戦略 3 集団非対称ゲーム

各集団の利得行列をそれぞれ，

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$$

とする．このとき，各平衡点まわりのヤコビ行列の固有値を調べた結果，任意の a，α_1，α_2 に対して，少なくとも 1 つの平衡点が漸近安定となることを示した．

今，$s_1^1 = 1$ または $s_1^1 = 0$，かつ，$\sum_{k=1}^{3} \alpha_k s_k^1 = a/(a+1)$ となる場合を考える．このとき，ある線分上の点が全て平衡点となっている．$s_1^1 = 1$ のとき，このような平衡点まわりのヤコビ行列の固有値を考えると，そのうちの 1 つは必ず正となる．したがって，この線分上の孤立していない平衡点は全て不安定である．一方，$s_1^1 = 0$ のとき，線分

$$s_3^1 = -\frac{\alpha_2}{1 - \alpha_1 - \alpha_2} s_2^1 + \frac{a}{(a+1)(1 - \alpha_1 - \alpha_2)} \tag{2}$$

上の点が全て平衡点となる．線分 (2) 上の平衡点は，以下の 3 つの場合に分類できることを明らかにした．

(a) 全て安定となる場合．
(b) 全て不安定となる場合．
(c) 線分 (2) が，孤立していない安定な平衡点からなる線分と，孤立していない不安定な平衡点からなる線分の 2 つに分けられる場合．

(a) の例として $a = 0.6$，$\alpha_1 = 0.3$，$\alpha_2 = 0.3$ の場合のレプリケータダイナミクスの位相平面を図 1 に示す．一方，(c) の例として $a = 0.3$，$\alpha_1 = 0.3$，$\alpha_2 = 0.3$ の場合を図 2 に示す．

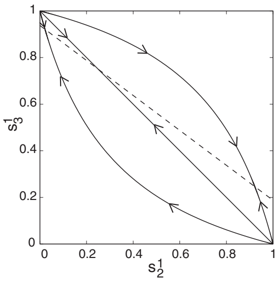

図 1 : (a) の場合

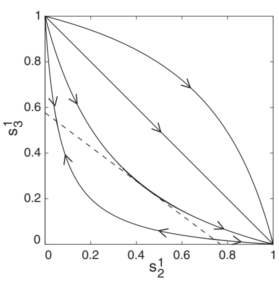

図 2 : (c) の場合

4　3 戦略 2 集団非対称ゲーム

各集団の利得行列をそれぞれ，

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2+a & 0 \\ 0 & 1 & 2+a \\ 2+a & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2-b & 0 \\ 0 & 1 & 2-b \\ 2-b & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とする．ただし，$a > 0$，$b > 0$ である．このとき，$(s_1^1, s_1^2, s_2^1, s_2^2) = (1/3, 1/3, 1/3, 1/3)$ が内部平衡点となる．この内部平衡点まわりのヤコビ行列の固有値より，

$$b - (a+b)\alpha_1 > 0$$

のとき，この平衡点は不安定となる．このとき 4 次元シンプレックス上に，サドルとなっている端点間を結ぶヘテロクリニックサイクル構造が見られる．例えば，$a = 0.3$，$b = 0.7$，$\alpha_1 = 0.4$ のとき，ヘテロクリニックサイクル構造の模式図を図 3 に示す．また，このときの s_1^1 の時間応答を図 4 に示す．全てのプレイヤーがある 1 つの純粋戦略に収束したように見えても，図 3 と図 4 より，これはヘテロクリニックサイクルに漸近しているだけであって，その純粋戦略に収束していないことが確認できる．

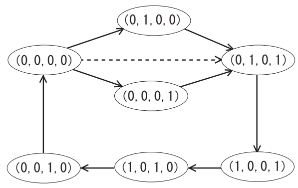

図 3 : ヘテロクリニックサイクル

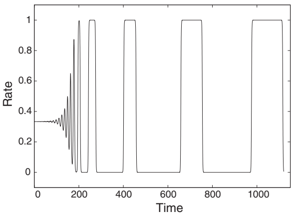

図 4 : s_1^1 の時間変化

5　結論

本報告では，2 戦略 3 集団非対称ゲームにおいて，少なくとも 1 つの平衡点が漸近安定となることを示した．特に，ある線分上の点が全て平衡点となるとき，そのような平衡点の安定性は 3 つの場合に分類できることを示した．また，3 戦略 2 集団非対称ゲームにおいて，4 次元シンプレックス上にヘテロクリニックサイクルが存在することを，シミュレーションによって示した．

参考文献

[1] J. メイナード–スミス, 寺本英・梯正之 訳，進化とゲーム理論：闘争の論理，産業図書，1985.
[2] P. D. Taylor, *Journal of Applied Probability*, Vol. 16, pp. 76–83, 1979.