利得の再配分のあるレプリケータダイナミクスの安定解析

学籍番号：90133051　潮 研究室　後藤隼人

1　はじめに

利己的に行動する主体が集団をなすとき，個人の利害と全体の利害は必ずしも一致しない．このような集団を良い状態に導くには，政府のような全体を統制する者の存在が必要になると考えられる．一方，進化ゲーム理論ではゲーム理論の観点から集団のダイナミクスが定式化されており，そこでは「利得の多い戦略ほどその採用者が増える」というルールが定められている．そのダイナミクスでは，各プレイヤーは単に利己的にふるまうものと考えられる．本報告では，統制者が集団の各プレイヤーの利得を回収し，適当に再配分することによって集団全体を望ましい状態に導く方法を表現するモデルとしてレプリケーター-ミューテーターダイナミクスを用い，その性質について考察する．

2　中立安定戦略（NSS）

進化ゲーム理論における NSS は次のように定義される．

- 混合戦略 x が NSS であるとは，各混合戦略 y に対してある $\bar{\epsilon}_y \in (0,1)$ が存在し，すべての $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon}_y)$ に対して
$$u[x, \epsilon y + (1-\epsilon)x] \geq u[y, \epsilon y + (1-\epsilon)x] \qquad (1)$$
が成り立つことをいう．ここで，$u[x,y]$ は戦略 x が戦略 y とのゲームで得る利得である．

3　利得の再配分と集団ダイナミクス

戦略の集合を $N = \{1, 2, \cdots, n\}$ で，戦略 $i \in N$ の集団シェアを x_i で表す．戦略 $i \in N$ の利得を $f_i(x)$ で表し，集団の平均利得を $\bar{f}(x) = \sum_{i \in N} x_i f_i(x)$ で表す．ここで，$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ であり，これを集団状態と呼ぶ．また，戦略 j を用いるプレイヤーの利得のうち，徴収されて戦略 i へ分配される割合を q_{ji} で表す．$n \times n$ 行列 $Q = \{q_{ji}\}$ を配分行列と呼ぶ．配分量を集団状態 x に応じて決定するとすると $Q = Q(x)$ である．回収した利得を常にすべて集団内に還元するとすると，$\sum_{i \in N} q_{ji} = 1 \quad \forall j \in N$ となる．ゲームが繰り返し行われ，利得の高い戦略ほどそれを採用するプレイヤーが増加するとすると，ダイナミクスは

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(x) q_{ji} - x_i \bar{f}(x) \quad i, j \in N \qquad (2)$$

と表される．式 (2) は進化ゲーム理論においてはレプリケーター-ミューテータダイナミクスと呼ばれ，その文脈では q_{ji} は戦略 j から戦略 i への変異率とされる．

4　放任と統制

利得の回収・再配分を行うにしても，さまざまな場合が考えられる．まず第一に，利得の回収・再配分をまったく行わず自然な成り行きに任せる場合を考え，次に，すべての利得を回収し，政府がすべて意のままに配分を行う場合を考える．前者の場合を放任，後者の場合を完全統制と見なすことができる．

目標とする集団状態を目標状態と呼び，x^* とおく．$\alpha \in [0,1]$ に対して $Q = (1-\alpha)E + \alpha X^*$ とおく．但し，E は $n \times n$ 単位行列，$X^* = (x^* x^* \cdots x^*)^T$ である．

$\alpha = 0$ の場合 $Q = E$ となり，これは回収と再配分がまったく行われない，放任の場合に相当する．このとき，式 (2) はいわゆるレプリケータダイナミクスに一致する．レプリケータダイナミクスは利得の回収と再配分を考慮しないモデルであり，戦略 i の集団シェアの変化率はそれ自身の利得と集団平均利得のみに依存する．$\alpha = 1$ の場合 $Q = X^*$ となり，これはプレイヤーが得るすべての利得を回収して再配分する，完全統制の場合に相当する．このとき，式 (2) は

$$\dot{x}_i = (x_i^* - x_i) \bar{f}(x) \qquad (3)$$

となる．元の利得構造は失われ，戦略 i の集団シェアの変化は

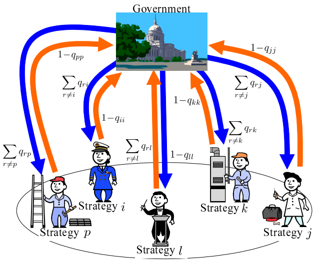

図 1　利得の回収と再配分

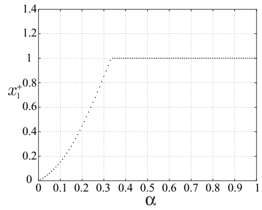

図 2　α と定常値の関係

x_i^* と x_i の差と，集団平均利得のみに依存する．あらゆる初期値から出発した解軌道は x^* に収束する．$\alpha = 0$ を放任，$\alpha = 1$ を完全統制とすると，$\alpha \in (0,1)$ はその中間，放任と統制が入り混じる場合を表すと考えられる．この α について次のことが言える．

- 状態 x^* が NSS であるならば，$\alpha > 0 \ \forall x$ のとき x^* は漸近安定な平衡点である．
- 状態 x^* が $\alpha = 0$ のとき不安定な平衡点ならば，$\alpha < 1$ のとき収束点は x^* には一致せず，α を 1 に近づけると目標状態 x^* の近くにアトラクタが存在する．

5　例題

NSS でない平衡点が存在する場合を考える．集団において，次のような利得行列で表される 2 人ゲームが行われるとする．

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad (4)$$

ここで，$a_{11} < a_{21}$ かつ $a_{12} < a_{22}$，さらに $a_{11} > a_{22}$ とする．このとき，プレイヤーは相手がどちらの戦略を用いた場合でも戦略 2 を選んだ方が高い利得を得ることができる．よって，$\alpha = 0$ のとき，端点以外から出発したすべての解軌道は端点 $x = (0,1)^T$ に向かう．しかし，$a_{11} > a_{22}$ より，端点 $(0,1)^T$ よりも端点 $(1,0)^T$ の方が全体として望ましい状態であると考えられる．この端点 $(1,0)^T$ は NSS でない平衡点である．そこで目標状態を $x^* = (1,0)^T$ とする．すると，α の値によってすべての解軌道が収束する点が定まる．$\alpha = \lambda \neq 0$ と固定したとき解空間には唯一の平衡点が存在し，これは大域的漸近安定となる．端点 $(1,0)^T$ 周りのヤコビ行列は $J(1,0) = (a_{12} - 2a_{11}) + a_{21}(1-\alpha) - a_{11}$ となる．例として，$a_{11} = 4$, $a_{12} = 0$, $a_{21} = 6$, $a_{22} = 1$ の場合のシミュレーション結果を図 2 に示す．この例では，$J(1,0) = 2 - 6\alpha$ より，$\alpha = 1/3$ のとき目標状態の安定性が変化することがわかる．シミュレーションによると，α が小さい場合は収束点は目標状態 $(1,0)^T$ に一致しないが，α の値を大きくするにつれて収束点と目標状態の間の距離は小さくなる．そして，α がある値より大きくなると，収束点は目標状態に完全に一致する．

これは，目標状態を達成するにはある程度以上の回収と再配分が必要であり，また，目標状態が達成された後であってもある程度の回収と再配分がなければ目標状態からは遠ざかってしまうため，維持するのにも回収と再配分が絶えず必要となることを示している．

6　おわりに

利得の回収と再配分とによって集団の統制を行うモデルとしてレプリケーター-ミューテータダイナミクスを用いることを提案し，その性質について考察を行った．

参考文献

[1] Weibull, J. W, 大和瀬達二監訳, “進化ゲームの理論,” オフィスカノウチ, 1998.

[2] Komarova, Natalia L, “Replicator-mutator equation, universality property and population dynamics of learning,” Journal of Theoretical Biology, 2004.