順序固定式ブロードキャスティング問題について

学籍番号：90408019　藤重研究室　柴田 鉄兵

1. 序論

ブロードキャスティング問題 (broadcasting problem) とは，コミュニケーショングラフ $G=(V,E)$ において，ある節点 $v \in V$ が持っているメッセージ M を他のすべての節点に伝達するために必要な最小時間 (ブロードキャスティング時間 $b_G(v)$)，および，その伝達プロトコルを求める問題である．ただし，1 単位時間あたりに，メッセージ M を受け取った各節点 w は，高々一つの隣接する節点 u にのみ，そのメッセージを伝達することが可能であると仮定する．近年発達の目覚ましいネットワークにおける情報通信において，ブロードキャスティング問題は基本的な問題であり，様々な研究がなされている [3,4].

このような古典的なブロードキャスティング問題では，メッセージの伝達プロトコルに送信者の情報を必要とするが，本論文では，与えられたグラフに対してあらかじめ順序付けを行うというプロトコルを提案する．これは送信者の不特定性を実現するのがねらいである．また，このプロトコルを用いることにより，メッセージの送信毎に順序付けを再計算する必要がなくなり，コンピュータの資源を有効に利用することが可能となる．

2. ブロードキャスティング問題

点集合 V, 枝集合 E からなる連結な無向グラフ $G=(V,E)$ を考える．G の枝 $\{v,w\} \in E$ を双方向化することによって得られた有向グラフを $D[G]=(V,A)$ とする．$A(v)=\{(v,w)\in A\}$ の順序付け Π_v とは $\Pi_v : A_v \to \{1,2,\cdots,|A(v)|\}$ である全単射写像のことである．本論文では，このような $\Pi=\{\Pi_v \mid v \in V\}$ に基づいたブロードキャスティングプロトコルの中で，平均的にブロードキャスティング時間を短くする問題を考える．より正確にいうと，

$$B^S(G) \quad = \quad \min_{\Pi} \sum_{v,w\in V} b_G^{\Pi}(v,w)$$

を求める問題を考える．ここで，$b_G^{\Pi}(v,w)$ をグラフ $D[G]$ とその順序付け Π に対する節点 v から節点 w へのメッセージ送信時間とする．

本論文では，n 節点からなるグラフ G として，完全グラフ K_n，木 T(その特別な場合としてパス P_n), サイクル C_n における $B^S(G)$ について以下の結果を得る．

定理 1 完全グラフ K_n に対して, $B^S(K_n)$ の下限値は

$$B^S(\mathrm{K}_n) \quad \geq \quad n^2(\log n - 1) + n.$$

また，上限値は

$$B^S(\mathrm{K}_n) \quad < \quad n^2(\log n-1)+n+2n^2\sqrt{\log n}.$$

□

定理 2 サイクル C_n に対して

$$B^S(G) = \begin{cases} n^3/3 & n=3m \\ n/3(n+1)(n-1) & \text{その他} \end{cases} \tag{1}$$

ただし，m は整数とする．また，式 (1) を実現する順序付けは，閉路に沿って時計回り方向の辺に 1 を, 反時計回り方向の辺に 2 を割当てたものである． □

木 $T=(V,E)$ において，辺 $(v,w)\in A$ に対する重み $\omega(v,w)$ を G から $\{v,w\}$ を除いたグラフにおいて w を含む連結成分における節点数とする．

定理 3 木 $T=(V,E)$ において，$B^S(T)$ を実現する順序付け $\Pi=\{\Pi_v \mid v\in V\}$ は,

$$w(v,w)\geq w(v,u) \implies \Pi_v(v,w) < \Pi_v(v,u)$$

によって得られる． □

系 4 パス P_n に対して，

$$B^S(\mathrm{P}_n) = \lfloor 1/4(n+1)(n-1)(2n-1)\rfloor. \tag{2}$$

また，式 (2) を実現する順序付けはパスの中心に向かう辺に 1, 外側に向かう辺に 2 を割当てたものである． □

3. 結論

本研究では，完全グラフに対しては，ブロードキャスティング時間の上下限値を求め，木，サイクル各々に対してはブロードキャスティング時間，および，それを達成する順序付けを求めることができた．今後の課題として，一般グラフにおける最適な順序付けを求めるアルゴリズムの開発をすること．また，論文 [1] で行われている目的関数を $b^O(G)=\min_{\Pi}\max_{v,w\in V} b_G^{\Pi}(v,w)$ とした順序付けとの比較，古典的なプロトコルとの比較があげられる．

参考文献

[1] H. Harutyunyan, A. L. Liestman, K. Makino and T. Shermer, Orderly broadcasting, *Working paper.*

[2] S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi and A. L. Liestman, A survey of gossiping and broadcasting in communication networks, *Networks* **18** (1988) 319-349.

[3] P. J. Slater, E. Cockayne and S. T. Hedetniemi, Information dissemination in trees, *SIAM J. Comput.* **10** (1981) 692-701.

[4] J. Vuillemin, A data structure for manipulating priority queues, *Comm. ACM* **21** (1978) 309-315.